ELEMENTOS DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

HELENA MARTINS
JOÃO LUIZ MARTINS

EDITORA UFOP

HELENA MARTINS

Formada em Matemática e Mestre em Engenharia de Automação e Sistemas pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

Foi bolsista durante 3 anos do Programa de Educação Tutorial (PET) Matemática, tutora do Ensino à Distância (EaD) e professora substituta na UFSC no ano de 2012.

EDITORA UFOP

ELEMENTOS DE
CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Helena Martins
João Luiz Martins

EDITORA UFOP

2014

Presidente Conselho Editorial
Gustavo Henrique Bianco de Souza

Coordenação Editorial
Daniel Ribeiro Pires

Projeto Gráfico | Helena Martins

Capa | Alvimar Ambrósio

Revisão Técnica | Autores

Editoração Eletrônica | Helena Martins

ISBN 978-85-288-0336-5

FICHA CATALOGRÁFICA

M386e Martins, Helena.
Elementos de cálculo diferencial e integral / Helena Martins e João Luiz Martins - Ouro Preto: UFOP, 2014.
252p.: graf.; tabs.

1. Cálculo. 2. Cálculo diferencial. 3. Cálculo integral. 4. Número - conceito. I. Martins, João Luiz. II. Universidade Federal de Ouro Preto. III. Título.

CDU: 51-3

Catalogação: sisbin@sisbin.ufop.br

Editora UFOP
http//:www.ufop.br
Tel.: 31 3559-1463 Telefax.: 31 3559-1255
Centro de Vivência | Sala 03 | *Campus* Morro do Cruzeiro
35400.000 | Ouro Preto | MG

Sumário

Sumário

.

Este livro é dedicado a mãe e esposa:

Sílvia Mara Martins

.

Agradecimentos

Nossos agradecimentos aos membros do comitê científico da Editora da UFOP pela sensibilidade e percepção da importância desta obra como apoio didático aos estudantes de Cálculo Diferencial e Integral. Em particular, a UFOP, esta grande Universidade Pública e de Qualidade.

Gostaríamos de agradecer aos nossos familiares; Sílvia, Ednardo, João Vitor, Luiz Fernando, Gabriela, Duda e Débora, bem com nossos país, avós, cunhados e amigos pelo incentivo e apoio de todos durante a trajetória da concepção desta obra.

Por fim um agradecimento especial a todos os membros do corpo técnico da Editora da UFOP: Alvimar, Daniel, Francisco Daher e Jânio Penna.

Apresentação

Este livro é dirigido aos estudantes da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e tem a pretensão de ser um texto auxiliar no desenvolvimento do conteúdo desta disciplina. Além disso, serve como apoio didático aos estudantes das licenciaturas, das áreas tecnológicas e dos demais bacharelados.

A nossa experiência acumulada durante muitos anos como, professores, orientadores e o relacionamento com os estudantes em vários cursos de graduação, onde o Cálculo Diferencial e Integral figura como disciplina obrigatória, nos credencia a propor uma sequência do conteúdo diferente, um enfoque metodológico mais objetivo, bem como a apresentação de modelos, exemplos e exercícios resolvidos fundamentais para a fixação de temas, que serão essenciais para o dia a dia dos nossos futuros profissionais.

A divisão dos tópicos propostos e o grau de dificuldade estabelecidos em cada capítulo e seção têm a finalidade de facilitar o processo de aprendizagem dos nossos estudantes, no que se refere a construção dos próprios conceitos e definições que serão relevantes para a concretização das habilidades necessárias para que eles possam enfrentar novos desafios.

.

Introdução

Este livro tem a pretensão de ser uma bibliografia auxiliar para uma primeira disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, bem como o de oferecer aos estudantes de todos os cursos de graduação, onde os conteúdos que integram esta disciplina são obrigatórios, ou mesmo, optativos, uma boa oportunidade de aprender e fixar os conceitos, definições e resultados relevantes, contribuindo assim para uma formação mais objetiva, ampla e com qualidade dos futuros profissionais.

Para a organização dos temas utilizou-se como princípio a evolução natural e lógica dos conceitos e resultados, permitindo aos leitores que possam avançar e também aprofundar muitos desses conteúdos. Além disso, esta organização tem a intenção de encorajá-los a enfrentar novos desafios.

No primeiro capítulo, apresenta-se um panorama detalhado sobre as funções elementares, onde estão disponíveis informações à respeito da definição, do gráfico e as características de inúmeras funções, que são imprescindíveis para a compreensão dos temas, que serão tratados nos capítulos seguintes deste livro.

No fim deste primeiro capítulo, reserva-se uma seção inteiramente destinada aos exemplos e exercícios resolvidos, para melhor formação e preparação de nossos leitores.

O leitor terá oportunidade, com o segundo capítulo, de ter acesso as ideias intuitivas, as definições, as propriedades e características sobre as indeterminações da teoria de Limites de uma Função Real. Reserva-se seções especiais, onde os Limites no Infinito, Limites Infinitos e Limites Fundamentais são introduzidos. Além disso, uma seção final é destinada para apresentação de uma quantidade bem razoável de exercícios resolvidos.

Para as Funções Contínuas, reservou-se o terceiro capítulo, onde além da definição, propriedades e exemplos apresenta-se o importante Teorema do Valor Intermediário acompanhado de uma seção com exercícios resolvidos.

Diferente dos principais e tradicionais livros de Cálculo Diferencial e Integral, reserva-se o quarto capítulo deste livro, para introduzir de maneira sistêmica os conceitos, propriedades e regras sobre Derivadas e Integrais, criando assim, seções especiais, onde o leitor poderá ser capaz de aprender e fixar os elementos essenciais destes temas. Para a concretização da idéia deste capítulo procurou-se seguir, os antigos e famosos Matemáticos, responsáveis pela construção das Ciências Exatas, através de seus métodos clássicos, que utilizaram os conceitos de Derivada e Integral para resolver vários problemas relacionados com a Física e com a Engenharia.

As aplicações da Derivada têm lugar no capítulo quinto, onde apresenta-se a taxa de variação, os princípios da relação da derivada com os famosos conceitos da Física, tais como velocidade e aceleração. Vários outros temas são descritos neste capítulo, como, as idéias sobre diferencial, a famosa e relevante regra de L'Hospital, os conceitos e resultados sobre máximos e mínimos, cuja teoria contribuem para o esboço de gráficos de funções, bem como, uma grande quantidade de exercícios resolvidos para ajudar os estudantes na fixação e manejo destes temas.

Os métodos de integração e suas aplicações estão descritos no capítulo sexto. Nele apresenta-se o método da substituição de variáveis, o método da integração por partes, o método das frações parciais, o método das substituições trigonométricas mais importantes, a integral definida e suas propriedades e o Teorema Fundamental do Cálculo. Uma seção final, neste capítulo, é reservada para as aplicações, com inúmeros exercícios resolvidos sobre a integral definida e o Teorema Fundamental do Cálculo.

Um apêndice é estabelecido para que possamos tratar vários temas da Matemática elementar, como conceitos sobre razões trigonométricas, fórmulas trigonométricas fundamentais, resultados sobre exponenciação, radiciação, fatoração e identidades polinomiais básicas. A finalidade deste apêndice é o de possibilitar aos leitores rever conceitos básicos e testar seus conhecimentos na resolução de algumas operações com temas relacionados à Matemática elementar.

Como mencionado acima, os assuntos tratados neste livro são de natureza mais objetivo e determinante à formação dos estudantes. Diferente dos temas tratados e apresentados nos tradicionais livros de Cálculo Diferencial e Integral. Além disso, diante da forma dirigida de como os conceitos, definições, propriedades são estabelecidos e do volume de exemplos e exercícios que são oferecidos aos leitores, tem-se a certeza de que a qualidade na formação dos estudantes deverá ser alcançada de maneira mais dinâmica e efetiva.

Capítulo 1

Funções Elementares

1.1 Introdução

Um dos mais relevantes conceitos da Matemática é sem dúvidas, o conceito de Função. Existem informações de que 300 a.C. Euclides já utilizava conceitos semelhantes. As primeiras ideias foram inicialmente apresentadas, mais formalmente, nos trabalhos de Newton[1] e Leibniz por volta do século XVII. Entretanto, somente com Leonard Euler é que este conceito foi apresentado de forma semelhante ao estilo de hoje.

Este capítulo consiste em apresentar as principais funções elementares e suas características, bem como, alguns gráficos especiais.

1.2 Definição

Diz-se que uma relação que associa o conjunto A em B é uma função, se esta relação associar cada elemento do conjunto A a um **único** elemento do conjunto B. Em resumo:

$$\begin{aligned} f: \quad A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

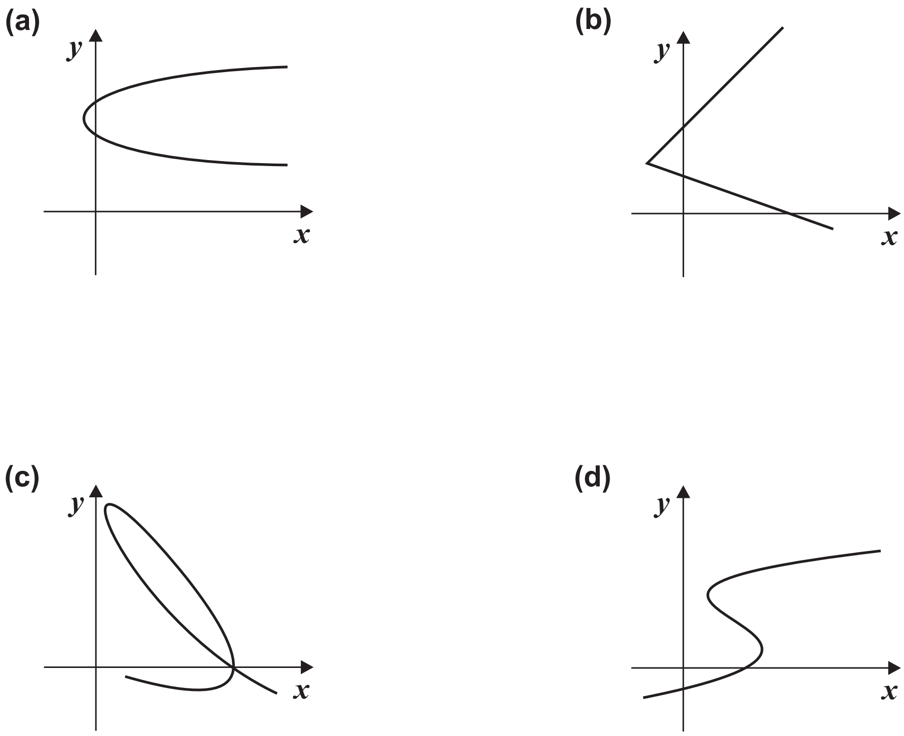
é uma função desde que para cada $x \in A$ implique que exista um **único** $f(x) \in B$.

[1]Boyer, Carl. História da Matemática

1.3 Gráfico de uma função

O gráfico de uma função $f : A \to B$ é um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares ordenados da forma $(x, f(x))$, isto é,

$$\mathrm{Gr}\,(f) \;=\; \{\,(x, y) \;\in\; A \times B\,,\;\; y = f(x)\}.$$



As figuras (a), (b), (c) e (d) são exemplos de ilustrações que não representam uma função.

No estudo de funções vamos entender uma função como sendo uma relação

$$\begin{aligned} f \;\;:\;\; & A \;\to\; B \\ & x \;\to\; f(x) \end{aligned}$$

onde f é uma função cujo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ é o domínio (i.e., o campo de existência de f e denotado por $\mathrm{D}_f = \text{Domínio de}\, f$) e o subconjunto $B \subset \mathbb{R}$ é o contra domínio de f.

Ao conjunto formado pelos elementos $f(x)$ do contra domínio chamamos de **Imagem** de f, ou seja,

$$\mathrm{Im}_f = \{\, y \in B \text{ tal } \quad \text{que } f(x) = y\,, \quad \text{com } \ x \in \ \mathrm{D}_f\}.$$

Exemplo. Considere a seguinte função

$$\begin{array}{rcl} f : \{1,2,3\} & \to & \{-3,-2,-1,1,2,3\} \\ f(x) & = & -x \end{array}$$

então o conjunto imagem desta função é dado por $\mathrm{Im}_f = \{-3,-2,-1\}$. O leitor atento deverá observar que nem sempre o contra domínio de f (neste exemplo é o conjunto $\{-3,-2,-1,1,2,3\}$) coincide com a imagem de f.

1.4 Domínio de uma Função

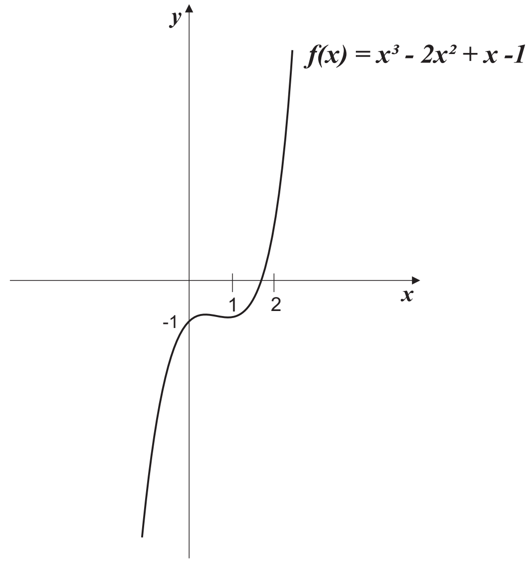
O domínio de uma função pode ser entendido como sendo o conjunto dos elementos x para os quais $f(x)$ tem sentido, ou seja, o campo de existência de f.

1.4.1 Função Polinomial

Toda função f definida por um polinômio tem como domínio o conjunto (subconjunto) dos números os reais.

Exemplo. Esboce o gráfico da função polinomial

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1\,.$$



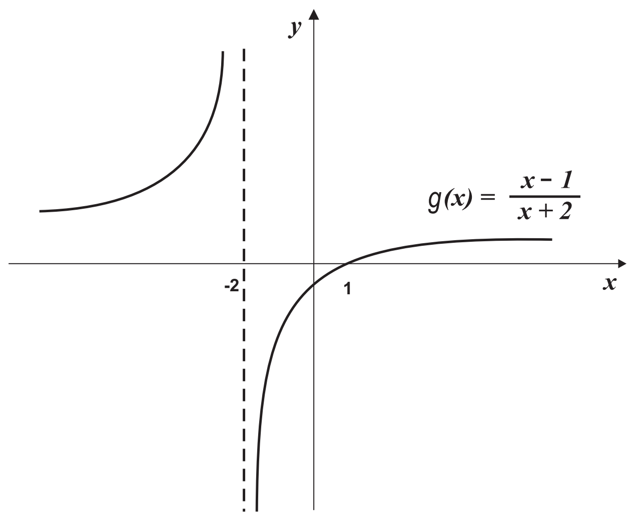
1.4.2 Função Racional

Toda função f definida por $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios, tem como domínio o conjunto formado pelos $x \in \mathbb{R}$ tais que $Q(x) \neq 0$, ou seja,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \quad Q(x) \neq 0\}.$$

Exemplo. Dê o domínio e esboce o gráfico da função racional

$$g(x) = \frac{x-1}{x+2}.$$

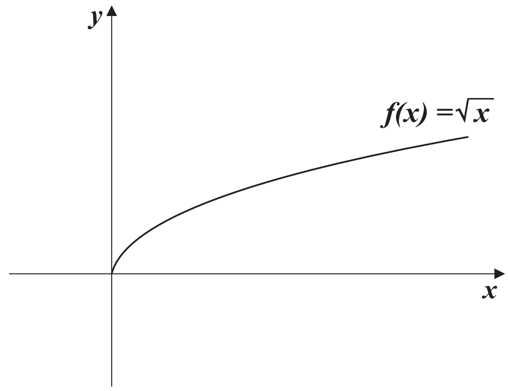


Solução. $D_g = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq -2\} = \mathbb{R} - \{-2\}$.

1.4.3 Função Irracional

Toda função f definida por $f(x) = \sqrt[n]{P(x)}$, tem como domínio o conjunto formado pelos elementos $x \in \mathbb{R}$ tais que $P(x) \geq 0$, caso n seja par, e todos os números reais, caso n seja ímpar.

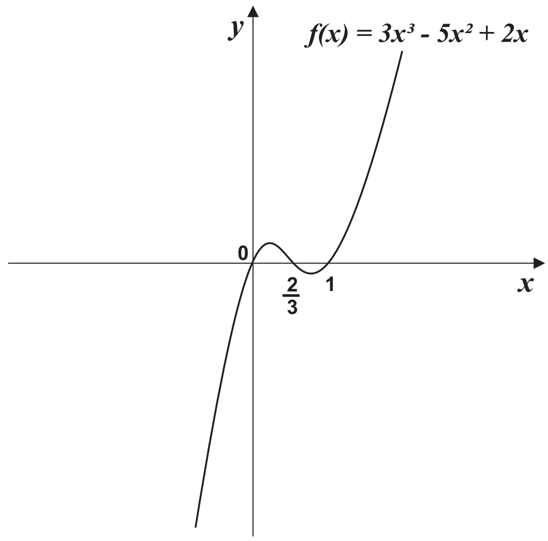
Exemplo. Dê o domínio e esboce o gráfico da função irracional $f(x) = \sqrt{x}$.



Solução. $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$.

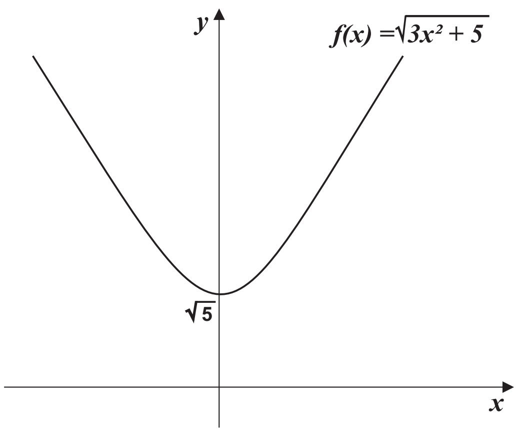
Exemplo 1. Encontre o domínio e a imagem das funções:

a) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 2x$



Solução. Neste caso temos, $D_f = \text{Im}_f = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5}$



Solução. $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 3x^2 + 5 \geq 0\} = \mathbb{R}$, pois, $3x^2 + 5 \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Já a imagem desta função é dada por $Im_f = \{y \in \mathbb{R} \,|\, y \geq \sqrt{5}\}$.

Exemplo 2. Encontre o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - 5x + 6}$

Solução. Esta função fica bem definida desde que o denominador não se anule. Assim sendo, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 5x + 6 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2, 3\}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2} + \dfrac{1}{x}$

Solução. O domínio de f será obtido a partir da intersecção dos domínios das três expressões que integram a função, ou seja,

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 1 > 0,\ x^2 - 3x + 2 \neq 0 \text{ e } x \neq 0\}.$$

Para facilitar o entendimento colocamos $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3}$, onde D_{f_1} é o domínio de $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$, cujo domínio é dado por

$$D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 1 > 0\} =]-\infty\,,\, -1[\, \cup\,]\,1\,,\, \infty[.$$

D_{f_2} é o domínio de $f_2(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$, onde o domínio é dado por

$$D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1, 2\}.$$

E por fim, D_{f_3} é o domínio de $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$. O resultado é dado por

$$D_{f_3} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Portanto,

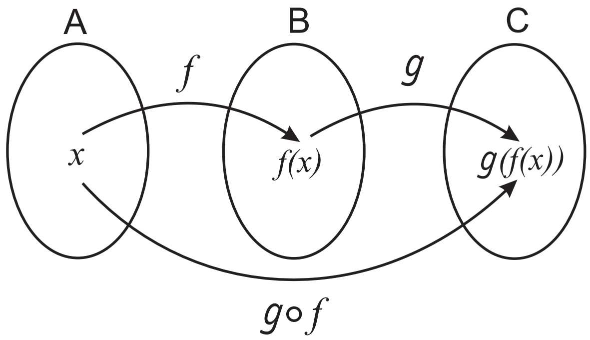
$$D_f =]-\infty\,,\, -1\,[\, \cup \,]\,1\,,\, \infty\,[- \{2\}.$$

1.5 Composição de Funções

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ duas funções com $f(B) = D_g$ então,

$$\begin{aligned} (gof) \ &: \ A \to C \\ & \quad\ x \to g(f(x)) \end{aligned}$$

as notações $gof(x)$ ou $g(f(x))$ expressam a função g composta com f, que é obtida aplicando-se g a imagem de f no ponto x do domínio de f.



Exemplos. Considere $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ e $g(x) = 2x + 3$:

(a) $(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x+3) = \sqrt{(2x+3)^2 - 1} = \sqrt{4x^2 + 12x + 8}$

(b) $(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2 - 1}) = 2(\sqrt{x^2 - 1}) + 3$

(c) $(fof)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x^2 - 1}) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 2}$

1.6 Tipos de Funções

1.6.1 Função Polinomial do Primeiro Grau

Chama-se função polinomial do primeiro grau toda função da forma

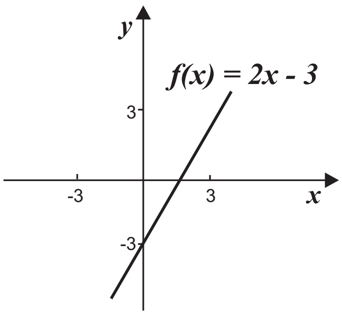
$$f(x) = ax + b \qquad \text{onde} \qquad a,\, b \in \mathbb{R} \quad \text{com}\, a \neq 0.$$

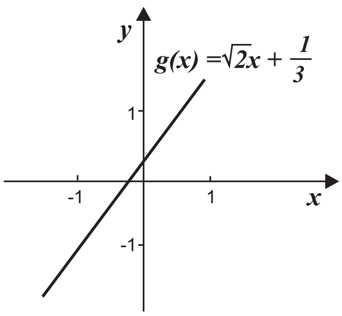
O gráfico de uma função polinomial do primeiro grau é sempre uma reta, que pode passar ou não pela origem. Dependendo do valor de a podemos ter informações se $f(x) = ax + b$ é crescente ou decrescente, ou seja,

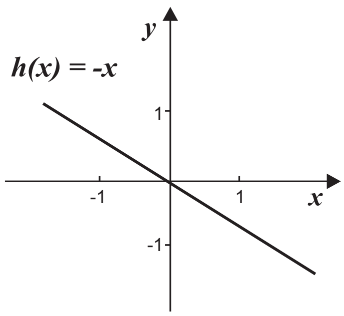
$$\begin{cases} f \;\text{ é crescente quando } \; a > 0; \\ f \text{ é decrescente quando } \; a < 0; \\ f \text{ é constante quando } \; a = 0. \end{cases}$$

Exemplo. Considere as funções

$$f(x) = 2x - 3\,, \qquad g(x) = \sqrt{2}\,x + \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad h(x) = -x.$$







Nestes casos temos $D_f = D_g = D_h = \mathbb{R}$. É fácil ver que f e g são funções crescentes e h é decrescente.

1.6.2 Função Polinomial do Segundo Grau

Chama-se função polinomial do segundo grau toda função da forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a,\, b,\, c \in \mathbb{R} \quad \text{com}\, a \neq 0.$$

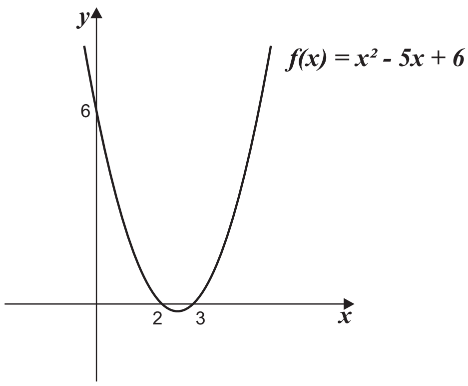
Neste caso, à respeito das raízes da equação associada à função acima pode-se afirmar que

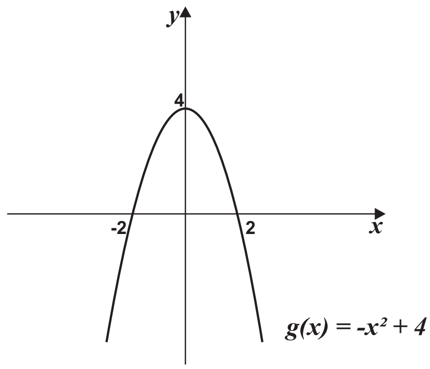
$$\begin{cases} b^2 - 4ac > 0 & \text{raízes reais e distintas;} \\ b^2 - 4ac = 0 & \text{raízes reais e iguais;} \\ b^2 - 4ac < 0 & \text{raízes não reais ou complexas.} \end{cases}$$

O domínio deste tipo de função é sempre o conjunto $\mathbb{R}$. O gráfico desta função é uma **parábola** que pode ser voltada para cima ou para baixo, caso o sinal de a seja positivo ou negativo, isto é,

$$\begin{cases} \text{Parábola voltada para cima} \quad \text{se} \quad a > 0; \\ \text{Parábola voltada para baixo} \quad \text{se} \quad a < 0. \end{cases}$$

Exemplo. Esboce os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = -x^2 + 4$.



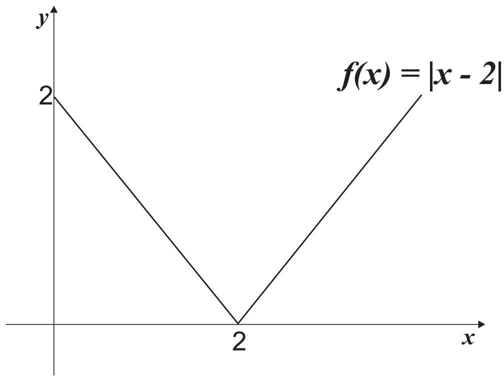


1.6.3 Função Modular

Define-se a função modular por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Exemplo. Esboce o gráfico da função modular $f(x) = |x - 2|$, depois encontre seu domínio e imagem.



Neste caso tem-se, $D_f = \mathbb{R}$ e $Im_f = \mathbb{R}_+$.

1.6.4 Funções Periódicas

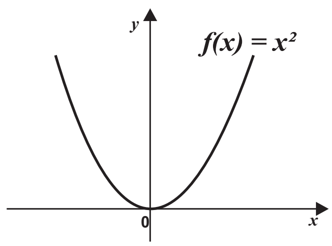
Diz-se que f é periódica se existe um número real $t \neq 0$ tal que $f(x+t) = f(x)$ $\forall x \in D_f$.
A função $f(x) = 2$ é periódica, basta observar que, $f(x+t) = f(x) = 2$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

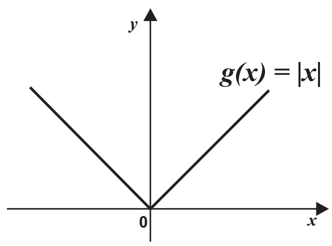
Observação. As funções trigonométricas são exemplos clássicos deste tipo de função. Uma boa leitura sobre estes exemplos pode ser feita pelo leitor já nas próximas seções deste livro.

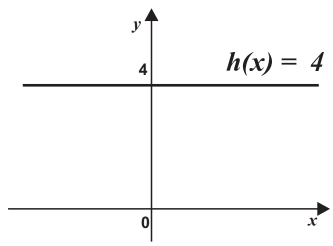
1.6.5 Função Par

Diz-se que f é uma função par, caso ela cumpra a condição $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in D_f$.
Geometricamente, as funções pares são simétricas em relação ao eixo dos y.

Exemplo. As funçoes $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$ e $h(x) = 4$ são pares. Veja os seus respectivos gráficos abaixo:



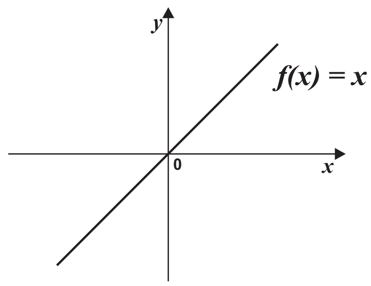


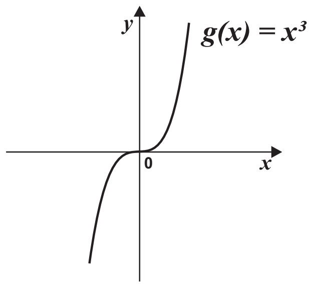


1.6.6 Função Ímpar

Diz-se que f é uma função ímpar, caso ela cumpra a condição $f(x) = -f(-x)\ \ \forall x \in D_f$. Geometricamente, as funções ímpares são simétricas em relação à origem.

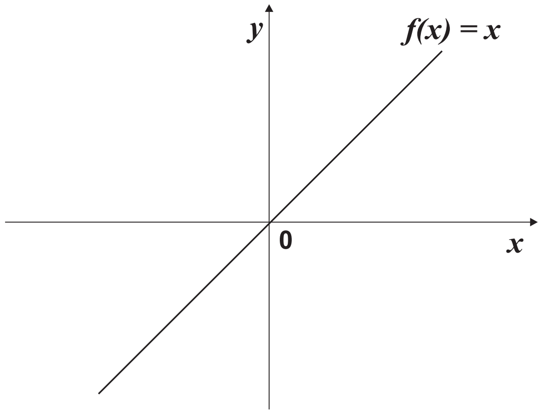
Exemplo. Observe que $f(x) = x \ \ e \ \ g(x) = x^3$ são exemplos de funções ímpares. Veja seus respectivos gráficos abaixo:





1.6.7 Função Injetora

Uma função $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ é dita injetora quando cumpre a propriedade de que para quaisquer que sejam $x_1 \neq x_2$ no domínio de f (em A) implicar que $f(x_1) \neq f(x_2)$ em B. A função $f(x) = x$, conhecida como função identidade, é um exemplo de função injetora.



1.6.8 Função Sobrejetora

Diz-se que uma função f é sobrejetora quando o contra domínio de f for igual a sua imagem. ($\mathrm{CD}_f = \mathrm{Im}_f$). A mesma função $f(x) = x$ é um exemplo clássico de função sobrejetora.

1.6.9 Função Bijetora

Diz-se que f é uma função bijetora quando for injetora e sobrejetora simultaneamente. Consequentemente, $f(x) = x$ é uma função bijetora.

1.6.10 Função Inversa

Seja $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ uma função bijetora então a inversa de f é uma função denotada por f^{-1} que tem a característica de levar os elementos do conjunto B nos do conjunto A, isto é,

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathrm{A} \to \mathrm{B} \\ & \quad x \quad \to \quad f(x) \\ f^{-1} \quad &: \quad \mathrm{B} \to \mathrm{A} \\ & \quad y \quad \to \quad f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Exemplo 1. Encontre a função inversa da função bijetora

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \qquad x \neq -2\,.$$

Solução. Escreve-se inicialmente a função da seguinte forma

$$y = \frac{3x-1}{x+2}$$

agora trocam-se as variáveis x por y e vice-versa, isto é,

$$x = \frac{3y-1}{y+2}.$$

Finalmente, isola-se y, o resultado é dado por;

$$x(y+2) = 3y-1 \quad \Rightarrow \quad xy + 2x = 3y - 1 \quad \Rightarrow \quad xy - 3y = -2x - 1.$$

Portanto,

$$y = \frac{(2x+1)}{(3-x)} \qquad x \neq 3.$$

Assim sendo,

$$\text{se} \quad f(x) = \frac{3x-1}{x+2} \quad \text{então} \quad f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{3-x}.$$

Exemplo 2. Encontre a função inversa de

$$f(x) = x^2 - 1.$$

Solução.
Seja

$$y = x^2 - 1.$$

Inicialmente, trocam-se as variáveis, isto é,

$$x = y^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x+1}\,.$$

Neste caso, a inversa depende das escolhas do domínio e da imagem para que a função f seja bijetora. Ou seja, escolhe-se a função bijetora

$$\begin{aligned} f\ :\ \ \mathbb{R}_+ &\to [-1, \infty[\\ f(x) &= x^2 - 1\,. \end{aligned}$$

Então f^{-1} será dada por

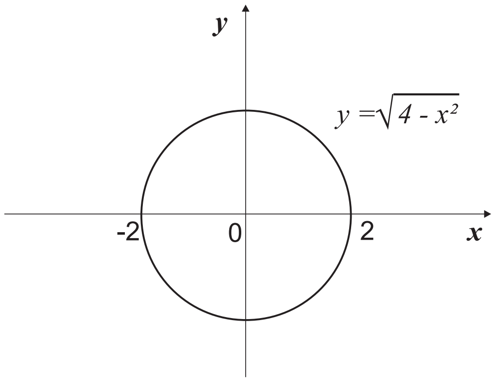
$$\begin{aligned} f^{-1}\ :\ \ [-1, \infty[&\to \mathbb{R}_+ \\ f^{-1}(x) &= \sqrt{x+1}\,. \end{aligned}$$

1.6.11 Caso Especial

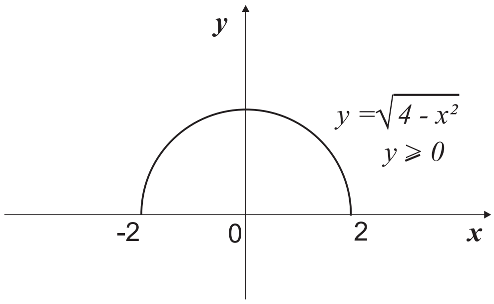
Considere a expressão $y = \sqrt{4 - x^2}$.
Da expressão acima podemos dizer que $y \geq 0$. Portanto,

$$y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y^2 + x^2 = 4\,.$$

Mas, $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 2^2$ é a equação da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 2.



Como $y \geq 0$, o gráfico de $y = \sqrt{4 - x^2}$ é somente a parte positiva da curva, observe o gráfico abaixo.



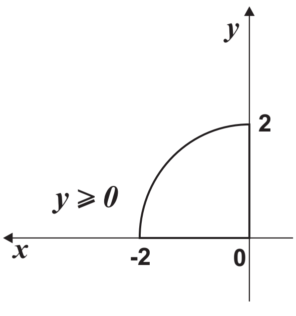
Neste caso, a função não é inversível por não ser injetora. Para ver que esta função não é injetora, basta o leitor observar, que para $x = -2$ *e* $x = 2$ a função tem como imagem o mesmo valor $f(-2) = f(2) = 0$. Portanto, não é bijetora, sendo assim, não é inversível. Para torná-la inversível, basta fazer uma das escolhas abaixo:

$y = \sqrt{4 - x^2}$ $f : [-2, 0] \to [0, 2]$,

ou

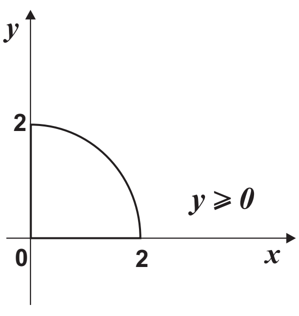
$y = \sqrt{4 - x^2}$ $f : [0, 2] \to [0, 2]$.

Assim sendo, ambas são inversíveis. Como tarefa faça o gráfico destas funções e encontre a lei que define a inversa em cada caso. Veja gráficos abaixo.



$y = \sqrt{4 - x^2}$

$f : [-2, 0] \to [0, 2]$



$y = \sqrt{4 - x^2}$

$f : [0, 2] \to [0, 2]$

1.6.12 Função Exponencial

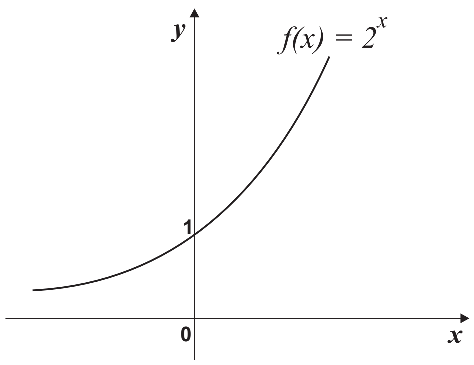
Seja a um número real, $a > 0$ e $a \neq 1$. Chama-se função exponencial de base a, a função que a cada número real x associa o número real a^x, ou seja,

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & \quad x \to f(x) = a^x. \end{aligned}$$

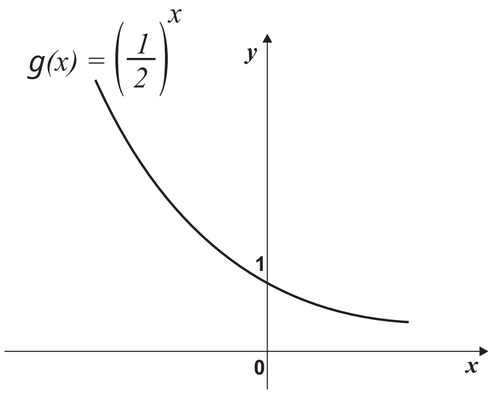
O domínio da função exponencial é dado por $\mathbb{R}$ e a imagem por $\mathbb{R}_+^*$.

Exemplo. Se $a > 1$ então a função exponencial é crescente. Entretanto, se $0 < a < 1$ então a função exponencial é decrescente. Para ilustrar este fato, observe os gráficos das funções abaixo;

a) $f(x) = 2^x$



b) $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$



1.6.13 Função Logarítmica

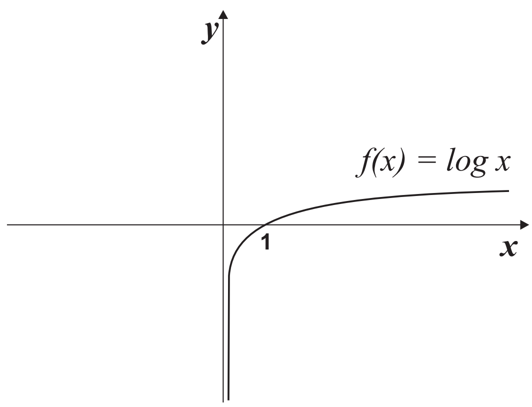
Chama-se função logarítmica de base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$ a função que associa a cada $x \in \mathbb{R}_+^*$ o número real $\log_a x$, isto é,

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ &x \to f(x) = \log_a x. \end{aligned}$$

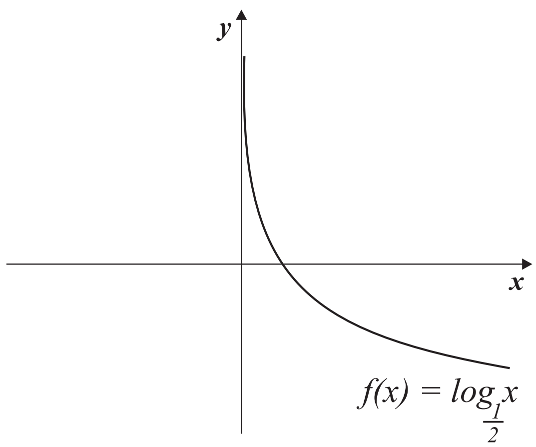
O domínio da função logarítmica é dado por $\mathbb{R}_+^*$ e a imagem por $\mathbb{R}$.

Exemplo. Se $a > 1$ a função logarítmica é crescente. Entretanto, se $0 < a < 1$ então a função é decrescente. Observe os gráficos das funções:

a) $f(x) = \log x$



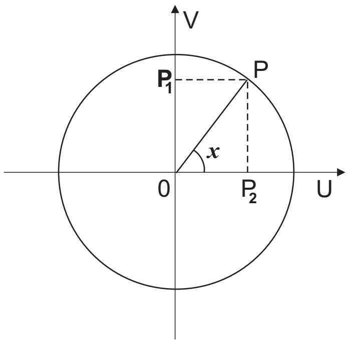
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.



1.7 Funções Trigonométricas

1.7.1 Função seno

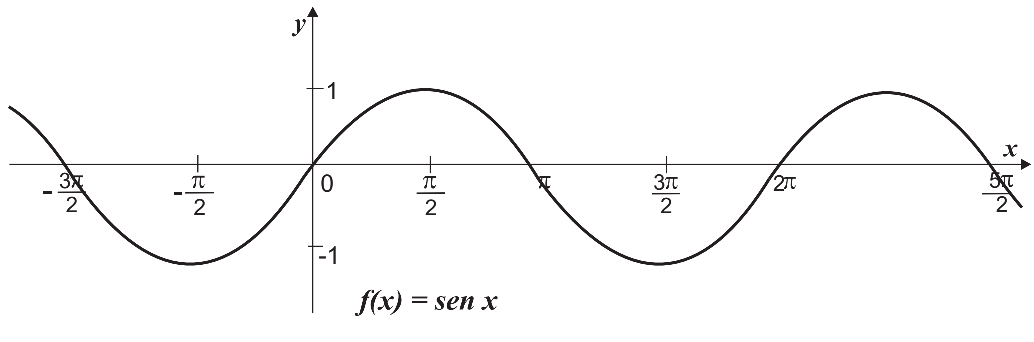
Considere o plano UOV e a circunferência de centro $C(0,0)$ e raio $r=1$. Sejam, um ângulo com medida x radianos e P o ponto de intersecção do lado terminal do ângulo x com a circunferência.



Denomina-se seno de x a ordenada P_1 do ponto P. A função seno é definida como sendo a função f que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \operatorname{sen} x$, isto é,

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

O domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo real $[-1,1]$. A função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é periódica de período 2π, pois, $f(x+2\pi) = f(x)$ para todo $x \in \mathrm{D}_f$.



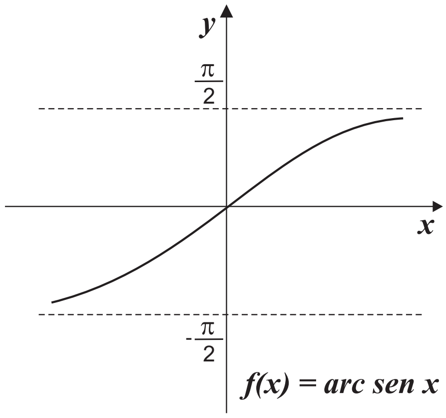
1.7.2 Função Arco Seno

Para obter a função inversa da função seno considera-se a função bijetora

$$\begin{aligned} f: \ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] &\to [-1,1] \\ f(x) &= \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

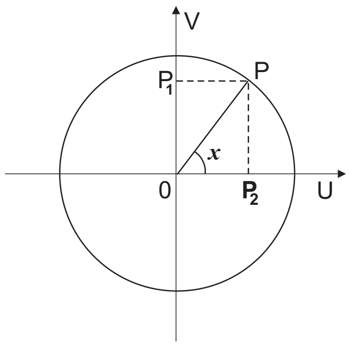
Então a inversa de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1} \ &: \ [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &x \to f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x \end{aligned}$$



1.7.3 Função Cosseno

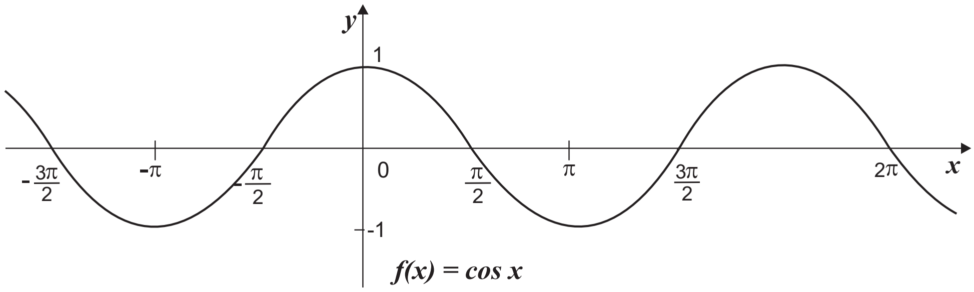
Considerando a circunferência anterior com as mesmas informações, denomina-se cosseno, a abscissa P_2, do ponto P.



A função cosseno é definida como sendo a função f que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \cos x$, isto é,

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &x \to f(x) = \cos x. \end{aligned}$$

O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo $[-1,1]$. A função $f(x) = \cos x$ também é uma função periódica de período 2π, pois $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.



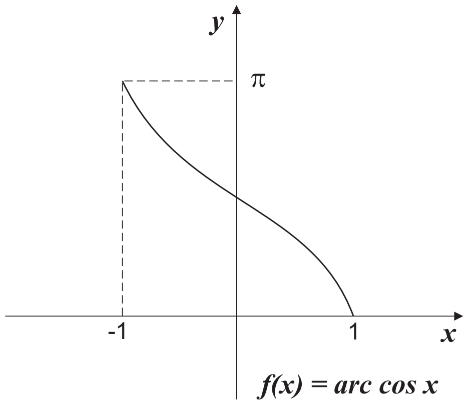
1.7.4 Função Arco Cosseno

Para obter a função inversa da função cosseno considera-se a função bijetora:

$$\begin{aligned} f: \quad [0,\pi] &\longrightarrow [-1,1] \\ f(x) &= \cos\, x \end{aligned}$$

então a inversa de $f(x) = \cos\, x$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad [-1,1] &\longrightarrow [0,\pi] \\ x &\longrightarrow f^{-1}(x) = \text{arc}\,\cos x. \end{aligned}$$

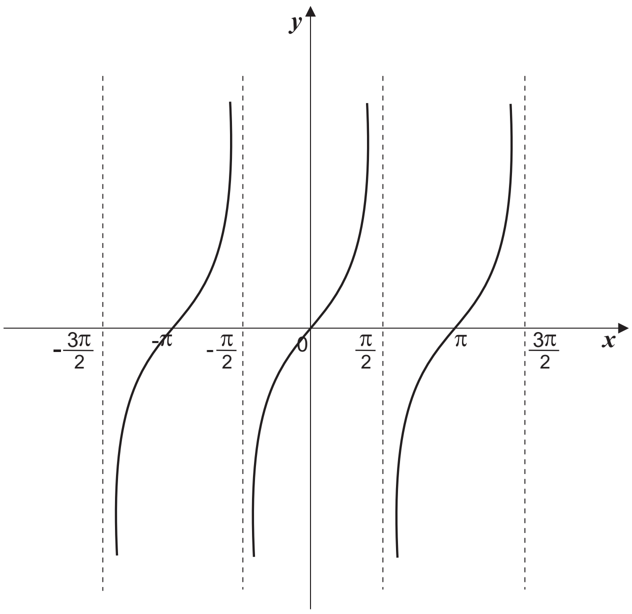


1.7.5 Funções Tangente

A função tangente

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

é definida para todos os números $x \in \mathbb{R}$ tais que $\cos x \neq 0$. Ou seja, o domínio da função tangente é dada por $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.



f(x) = tg x

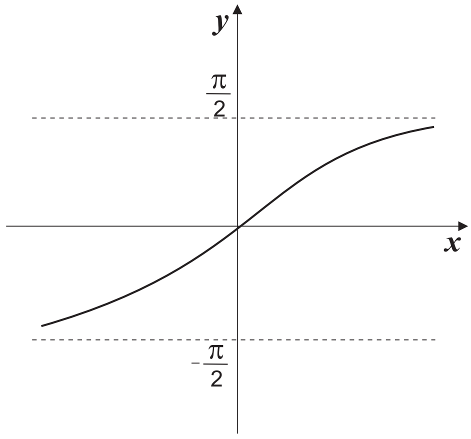
1.7.6 Função Arco Tangente

Considere a função bijetora

$$f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \operatorname{tg} x.$$

A inversa de $f(x) = \operatorname{tg} x$ é a função definida por

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \to f^{-1}(x) = \operatorname{arc}\ \operatorname{tg} x.$$



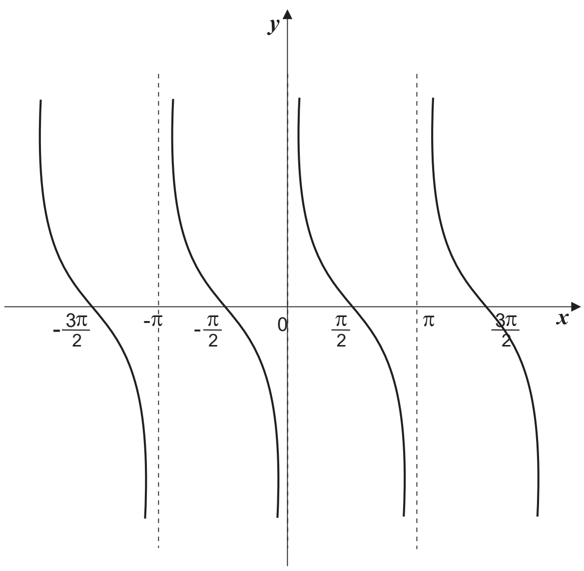
f(x) = arc tg x

1.7.7 Função Cotangente

A função cotangente é definida por

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

para todos os números $x \in \mathbb{R}$ tais que $\operatorname{sen} x \neq 0$. Ou seja, o domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.



f(x) = cotg x

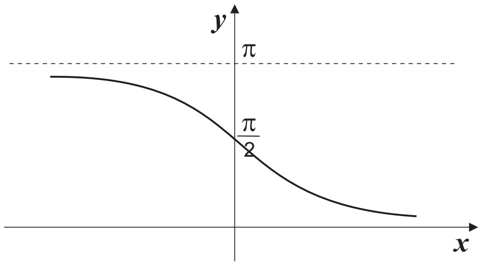
1.7.8 Função Arco Cotangente

Considere a função bijetora

$$\begin{aligned} f:\ \ ]0\,,\,\pi[&\longrightarrow [-1,1] \\ f(x) &= \operatorname{cotg} x. \end{aligned}$$

A inversa de $f(x)$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ \ [-1,1] &\longrightarrow]0\,,\,\pi[\\ x &\longrightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arc\ cotg} x. \end{aligned}$$

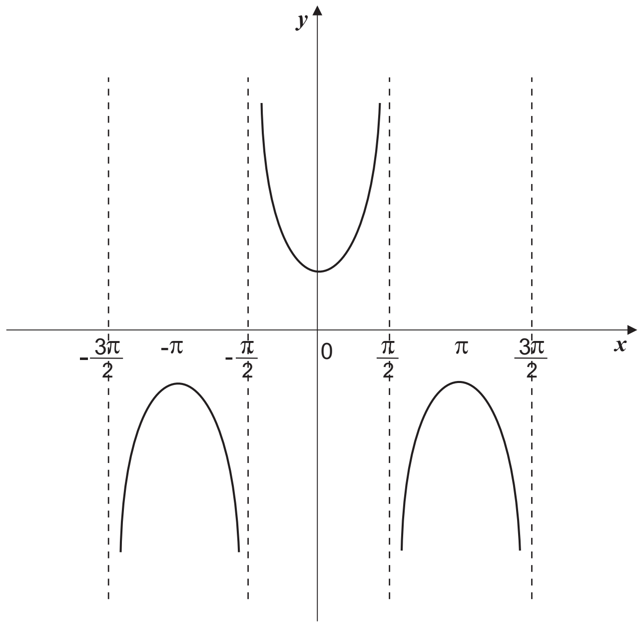


f(x) = arc cotg x

1.7.9 Função Secante

Define-se a função secante como sendo

$$\begin{aligned} f:\ \ \{x \in \mathbb{R} \mid \ x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k\ \in\ \mathbb{Z}\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = sec\, x = \frac{1}{\cos x}\,. \end{aligned}$$



f(x) = sec x

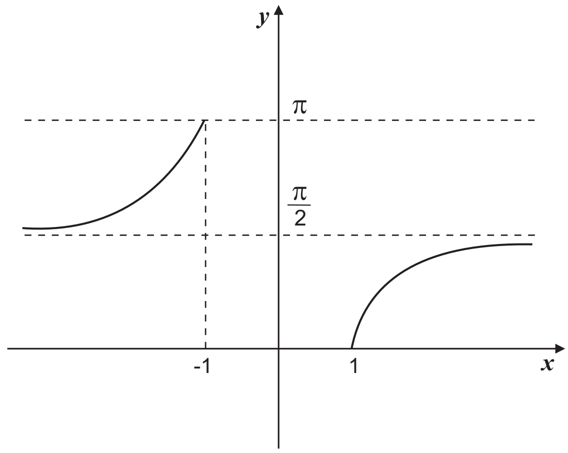
1.7.10 Função Arco Secante

Considere a função bijetora

$$\begin{array}{rll} f: &]0,\pi[-\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} & \longrightarrow]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\\ & x & \longrightarrow f(x) = sec\, x. \end{array}$$

A inversa de $f(x)$ é a função definida por

$$\begin{array}{rll} f^{-1}: &]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[& \longrightarrow]0,\pi[-\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\} \\ & x & \longrightarrow f^{-1}(x) = \text{arc sec}\, x. \end{array}$$

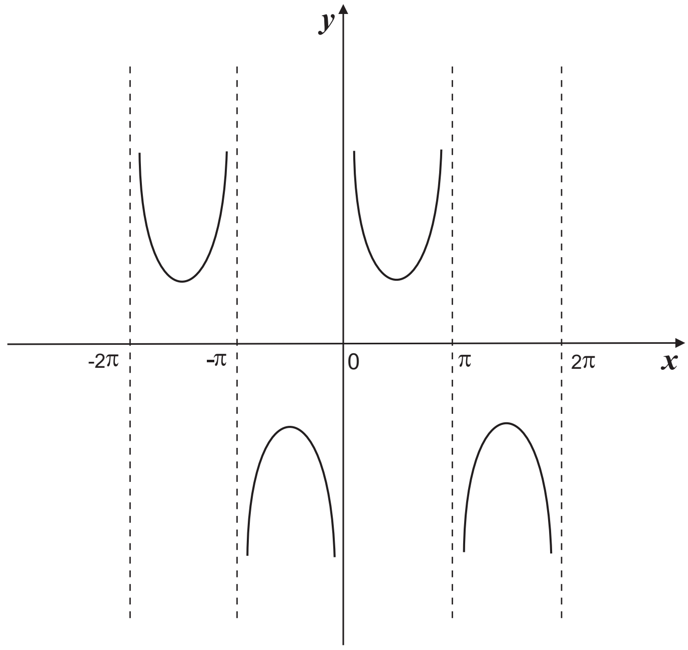


f(x) = arc sec x

1.7.11 Função Co-secante

Define-se função co-secante por

$$\begin{array}{rll} f: & \{x\in\mathbb{R} \mid \ x\neq k\pi,\, k\in\mathbb{Z}\} & \to \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow f(x) = \text{cosec}\, x = \dfrac{1}{sen\, x}. \end{array}$$



f(x) = cosec x

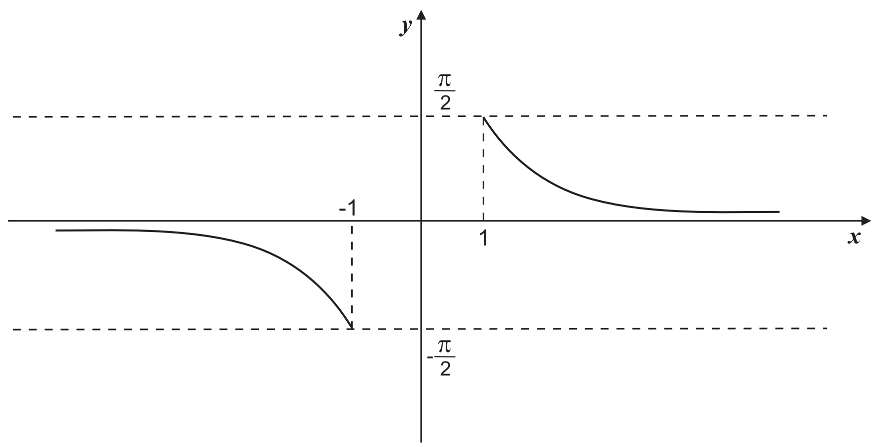
1.7.12 Função Arco Co-secante

Considere a função bijetora

$$
\begin{array}{rll}
f: & \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\} & \to]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\
& x & \to f(x) = cosec\, x\,.
\end{array}
$$

A inversa da função arco co-secante é definida por

$$
\begin{array}{rll}
f^{-1}: &]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[& \to \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[\cup \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right] \\
& x & \to f^{-1}(x) = \text{arc cosec}\, x
\end{array}
$$



f(x) = arc cosec x

1.8 Exercícios Resolvidos

(1) Considere a função

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}\,.$$

Determine:

a) $\dfrac{f(1)-3f(0)+5f(2)}{f(-2)}$ **b)** $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ **c)** $[f(f(1))]^2\,.$

Solução.

a) $\dfrac{f(1)-3f(0)+5f(2)}{f(-2)} = \dfrac{\frac{1}{2}-3.(-1)+5.1}{5} = \dfrac{\frac{1}{2}+3+5}{5} = \dfrac{\frac{17}{2}}{5} = \dfrac{17}{10}\,.$

b) $\dfrac{f(h)-f(0)}{h} = \dfrac{\frac{(2h-1)}{(h+1)}+1}{h} = \dfrac{\frac{3h}{(h+1)}}{h} = \dfrac{3h}{h(h+1)} = \dfrac{3}{(h+1)}$

c) $[f(f(1))]^2 = \left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = [0]^2 = 0$

(2) Se $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ e $a = -d$ mostre que $f(f(x)) = x\,.$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right) = \left(\frac{a\frac{(ax+b)}{(cx+d)}+b}{c\frac{(ax+b)}{(cx+d)}+d}\right) = \left(\frac{\frac{a^2x+ab+cbx+db}{(cx+d)}}{\frac{acx+cb+cdx+d^2}{(cx+d)}}\right) \\ &= \left(\frac{a^2x+ab+cbx+db}{acx+cb+cdx+d^2}\right) = \left(\frac{a^2x+cbx}{cb+d^2}\right) \\ &= \frac{x(a^2+cb)}{(d^2+cb)} = \frac{x(a^2+cb)}{(a^2+cb)} = x\ . \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

(3) Se $f(x) = |x| - 2x$ então mostre que $f(|a|) = -|a|\,.$

Demonstração. Com efeito, se $a \geq 0$ então $|a| = a$ e assim,

$$f(|a|) = ||a|| - 2|a| = a - 2a = -a\,.$$

Por outro lado, se $a < 0$ então $|a| = -a$ e desta forma,

$$f(|a|) = ||a|| - 2|a| = -a + 2a = +a\,.$$

Portanto,

$$f(|a|) = \begin{cases} -a & \text{se} \quad a \geq 0 \\ a & \text{se} \quad a < 0\,. \end{cases}$$

Desta forma,

$$f(|a|) = -|a|\ . \qquad \blacksquare$$

(4) Seja $\psi(x) = 2x - 7$ então determine $\psi \circ \psi$ e $[\psi(x)]^2$.

Solução.

$$(\psi \circ \psi)(x) = \psi(\psi(x)) = \psi(2x-7) = 2(2x-7) - 7 = 4x - 14 - 7 = 4x - 21\,.$$

Por outro lado,

$$[\psi(x)]^2 = [2x-7]^2 = 4x^2 - 28x - 49\,.$$

(5) Seja $h(x) = ax + b$ encontre os valores de a e b para que $h(h(x)) = 4x - 9$.

Solução. Com efeito,

$$h(h(x)) = h(ax+b) = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b = a^2x + (ab+b)\,.$$

Para obter os valores de a e b deve-se encontrar a solução da equação

$$h(h(x)) = a^2x + (ab+b) = 4x - 9\,.$$

Portanto,

$$a = 2 \quad \text{e} \quad b = -3 \quad \text{ou} \quad a = -2 \quad \text{e} \quad b = 9\,.$$

(6) Seja $f(x) = x^2$ encontre a função g para que $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$.

Solução. Com efeito, como $f(x) = x^2$ então

$$4x^2 - 12x + 9 = (f \circ g)(x) = (f(g(x)) = [g(x)]^2\,.$$

Portanto,

$$g(x) = \pm\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = \pm\sqrt{(2x-3)^2} = \pm(2x-3)\,.$$

(7) Seja $f(x) = \dfrac{1}{x}$ então mostre que $f(h+1) - f(1) = -\dfrac{h}{(h+1)}$.

Demonstração. Com efeito, utilizando-se a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$, tem-se

$$f(h+1) - f(1) = \frac{1}{h+1} - \frac{1}{1} = \frac{1}{(h+1)} - 1 = -\frac{h}{(h+1)}. \qquad \blacksquare$$

(8) Determine o domínio de cada uma das funções abaixo

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ **b)** $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ **c)** $h(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ **d)** $\phi(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

Solução.

a) O domínio da função f são todos os números reais, isto é, $D_f = \mathbb{R}$, haja vista que esta função é definida por um polinômio do segundo grau.

b) Para obter o domínio da função g deve-se lembrar que esta função está definida por uma raiz quadrada o que significa que a sua existência somente se dá quando a expressão $4 - x^2 \geq 0$. Portanto,

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 4 - x^2 \geq 0\} = [-2, 2].$$

c) Analogamente, a função h existe desde que $\dfrac{x}{x+1} \geq 0$, pois, são para estes valores que a raiz quadrada faz sentido. Assim sendo;

$$D_h = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{x}{x+1} \geq 0 \right\} =]-\infty, -1[\cup [0, \infty[.$$

d) O domínio da função ϕ é composto pela intersecção dos valores de existência para as expressões integrantes. Isto é, a expressão x tem como domínio todos os números reais (pois, é um polinômio). Já a existência da expressão $\dfrac{1}{x}$ se dá para todos os números reais, exceto o zero. Como o domínio é determinado pela intersecção (ou seja, a existência simultanea destas expressões), o resultado é dado por

$$D_\phi = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*.$$

(9) Considere as funções

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 16} \qquad g(x) = \frac{x}{1+x^2} \qquad h(x) = 3x - 1\,.$$

Determine:

a) $f(x) + g(x) + h(x)\,,$ **b)** $f(x).g(x)\,,$ **c)** $(f \circ g)(x)$ e **d)** $\dfrac{h(x) - g(x)}{f(x)}\,.$

Solução.

a)

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) + h(x) &= \sqrt{x^3 - 16} + \frac{x}{1+x^2} + (3x - 1) \\ &= \frac{(1+x^2)\sqrt{x^3 - 16}) + x + (3x-1)(1+x^2)}{(1+x^2)}\,. \end{aligned}$$

b)

$$f(x).g(x) = \left(\sqrt{x^3 - 16}\right)\left[\frac{x}{(1+x^2)}\right] = \frac{x\sqrt{x^3 - 16}}{(1+x^2)}\,.$$

c)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{(1+x^2)}\right) = \sqrt{\left(\frac{x}{(1+x^2)}\right)^3 - 16}\,.$$

Isto é,

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 16(1+x^2)^3}{(1+x^2)^3}}\,.$$

d)

$$\frac{h(x) - g(x)}{f(x)} = \frac{(3x-1) - \frac{x}{1+x^2}}{\sqrt{x^3 - 16}} = \frac{\frac{(1+x^2)(3x-1) - x}{(1+x^2)}}{\sqrt{x^3 - 16}} = \frac{3x^3 - x^2 + 2x - 1}{(1+x^2)\left(\sqrt{x^3 - 16}\right)}\,.$$

(10) Seja $f(x) = x^2 - 2x + 1$ encontre uma função h tal que

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) = x - 1\,.$$

Solução. Com efeito,

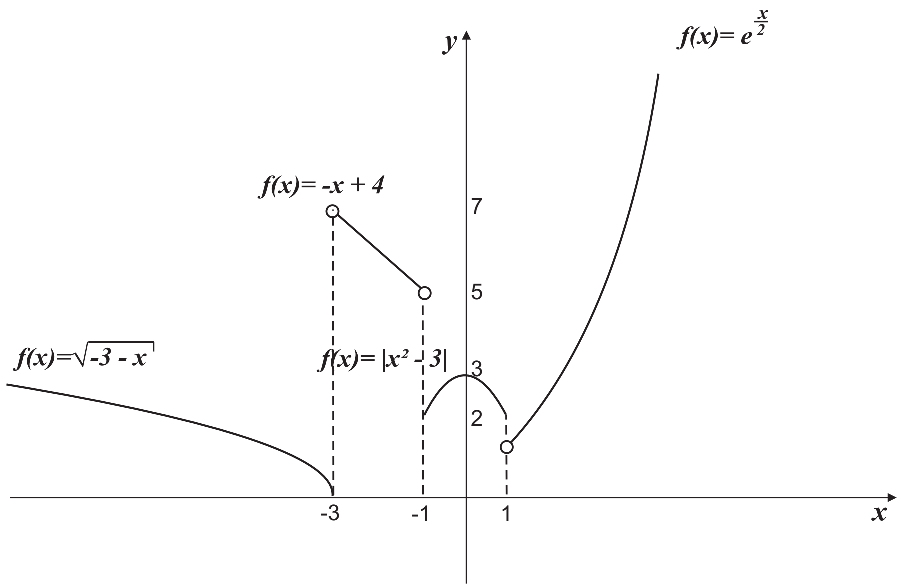
$$x - 1 = \left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{h(x)}\,.$$

Portanto,

$$h(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)} = x - 1\,.$$

(11) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3-x} & \text{se} \quad x \leq -3 \\[2ex] -x+4 & \text{se} \quad -3 < x < -1 \\[2ex] |x^2 - 3| & \text{se} \quad |x| \leq 1 \\[2ex] e^{\frac{x}{2}} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$



(12) Seja f uma função do primeiro grau, se $f(-1) = 2$ e $f(2) = 3$ então encontre a lei de formação desta função.

Solução. Com efeito, como f é uma função do primeiro grau então ela pode ser escrita como $f(x) = ax + b$ onde a e b são números reais. Deve-se então obter os valores de a e b. Assim sendo,

$$2 = f(-1) = -1a + b = b - a \qquad \text{e} \qquad 3 = f(2) = 2a + b\,.$$

A solução deste sistema é dado por $a = \dfrac{1}{3}$ e $b = \dfrac{7}{3}$.

Portanto,

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}.$$

(13) Mostre que $f(x) = x^3 - 2x$ é uma função impar.

Demonstração. Com efeito, é necessário demonstrar que $f(-x) = -f(x)$, para qualquer que seja $x \in D_f$. De fato, considere $x \in D_f$, então

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -f(x) \qquad \text{para todo} \qquad x \in D_f.$$

Segue então que $f(x) = x^3 - 2x$ é uma função impar. ■

(14) Mostre que $f(x) = |x|$ é uma função par.

Demonstração. Para que f seja considerada uma função par é necessário demonstrar que para todo $x \in D_f$ tem-se $f(-x) = f(x)$. Desta forma, considere $x \in D_f$, então

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x).$$

Portanto, $f(x) = |x|$ é uma função par. ■

(15) Mostre que $\Phi(x) = \ln \dfrac{(x+1)}{(x-1)}$ é uma função ímpar.

Demonstração. Com efeito, seja $x \in D_\Phi$ então

$$\begin{aligned} \Phi(-x) &= \ln \frac{(-x+1)}{(-x-1)} = \ln \frac{-(x-1)}{-(x+1)} = \ln \frac{(x-1)}{(x+1)} \\ &= \ln \left[\frac{(x+1)}{(x-1)} \right]^{-1} = -\ln \frac{(x+1)}{(x-1)} = -\Phi(x). \end{aligned}$$

Portanto, Φ é uma função ímpar. ■

(16) Mostre que, se f e g são funções impares então $h(x) = f(x).g(x)$ é par.

Demonstração. De fato, considere $x \in D_f$ e $x \in D_g$ então , como f e g são funções ímpares, tem-se

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{e} \qquad g(-x) = -g(x)\,.$$

Portanto,

$$h(-x) = f(-x).g(-x) = [-f(x)].[-g(x)] = f(x).g(x) = h(x)\,.$$

Segue que h é uma função par. $\blacksquare$

(17) Mostre que, se f e g são funções impares então $T(x) = f(x) + g(x)$ é ímpar.

Demonstração. Com efeito, considere $x \in D_f$ e $x \in D_g$ então, como f e g são funções ímpares, tem-se

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{e} \qquad g(-x) = -g(x)\,.$$

Portanto,

$$T(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -[f(x) + g(x)] = -T(x)\,.$$

Segue que T é uma função ímpar. $\blacksquare$

(18) Mostre que para qualquer que seja a função f tem-se

$$H(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \qquad \text{é par} \quad \text{e} \quad M(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \quad \text{é ímpar}\,.$$

Demonstração. Seja f uma função qualquer e $x \in D_f$ então

$$H(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(-(-x))] = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = H(x)\,.$$

Portanto, H é par. $\blacksquare$

Por outro lado,

$$M(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(-(-x))] = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -M(x)\,.$$

Assim sendo, M é ímpar. $\blacksquare$

(19) Se f e g são funções periódicas de período T então $f+g$ é periódica de período T.

Prova. De fato, como f e g são funções periódicas de período T então

$$f(x+T) = f(x) \qquad \text{e} \qquad g(x+T) = g(x).$$

Assim sendo,

$$(f+g)(x+T) = f(x+T) + g(x+T) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)\,.$$

Portanto, $f+g$ é periódica de período T. $\blacksquare$

(20) Seja f uma função periódica de período T então mostre que $3T$ também é período de f.

Prova. Com efeito, como f é uma função periódica de período T então

$$f(x+T) = f(x)\,.$$

Assim sendo,

$$f(x+3T) = f((x+2T)+T) = f(x+2T) = f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x)\,.$$

Desta forma então, f é periódica de período $3T$. $\blacksquare$

(21) Considere $h(x) = 2^x$ então

$$h(x+3) - h(x-1) = \frac{15}{2}h(x)\,.$$

Prova. De fato,

$$h(x+3) - h(x-1) = 2^{(x+3)} - 2^{(x-1)} = 2^x\,2^3 - 2^x\,2^{-1} = 2^x\left[8 - \frac{1}{2}\right] = \frac{15}{2}h(x)\,. \qquad \blacksquare$$

(22) Sejam

$$A(x) = \frac{1}{2}\left[a^x + a^{-x}\right] \qquad \text{e} \qquad B(x) = \frac{1}{2}[a^x - a^{-x}]\,.$$

Mostre que

$$A(x+y) = A(x)A(y) + B(x)B(y)\,.$$

Prova. Com efeito,

$$A(x+y) = \frac{1}{2}\left[a^{x+y} + a^{-(x+y)}\right] = \frac{1}{2}\left[a^x a^y + a^{-x}a^{-y}\right]\,.$$

Por outro lado,

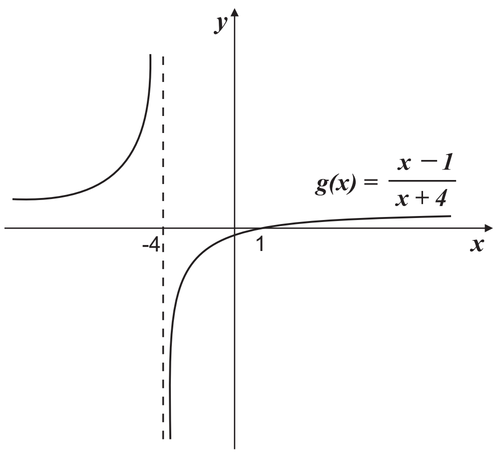
$$\begin{aligned}
A(x)A(y) + B(x)B(y) &= \frac{1}{2}\left[a^x + a^{-x}\right]\frac{1}{2}\left[a^y + a^{-y}\right] + \frac{1}{2}[a^x - a^{-x}]\frac{1}{2}[a^y - a^{-y}] \\
&= \frac{1}{4}\left[a^{x+y} + a^{x-y} + a^{-x+y} + a^{-x-y}\right] \\
&+ \frac{1}{4}\left[a^{x+y} - a^{x-y} - a^{-x+y} + a^{-x-y}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[a^{x+y} + a^{-x-y}\right] = \frac{1}{2}\left[a^x a^y + a^{-x}a^{-y}\right] = A(x+y)\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$A(x+y) = A(x)A(y) + B(x)B(y)\,. \qquad \blacksquare$$

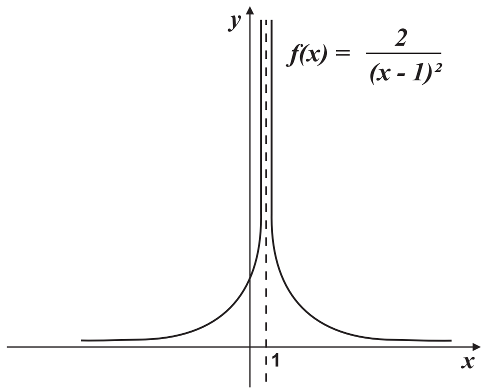
(23) Esboce o gráfico da função racional

$$g(x) = \frac{x-1}{x+4}\,.$$



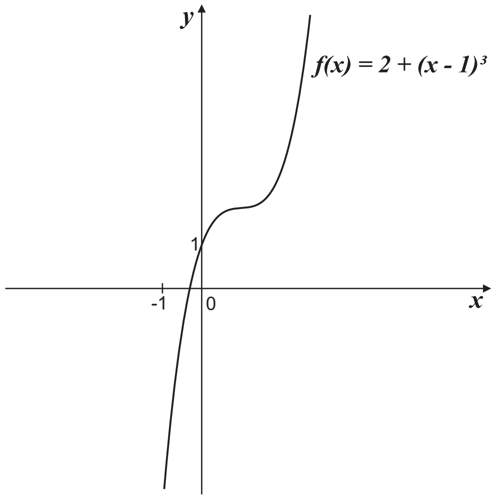
(24) Esboce o gráfico da função racional

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2}\,.$$



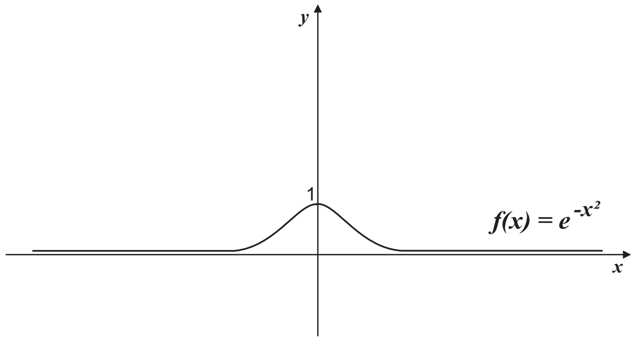
(25) Esboce o gráfico da função polinomial

$$f(x) = 2 + (x-1)^3\,.$$



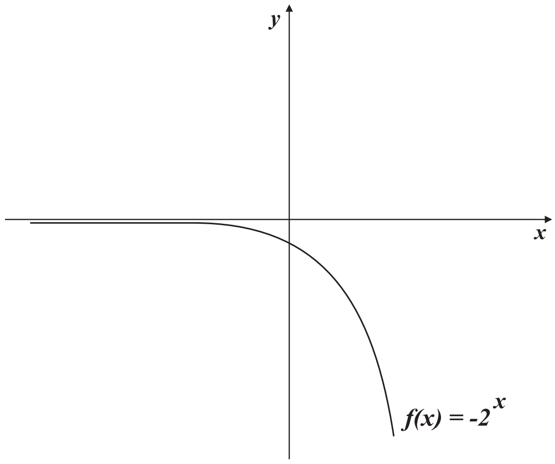
(26) Esboce o gráfico da função exponencial

$$f(x) = e^{-x^2}\,.$$



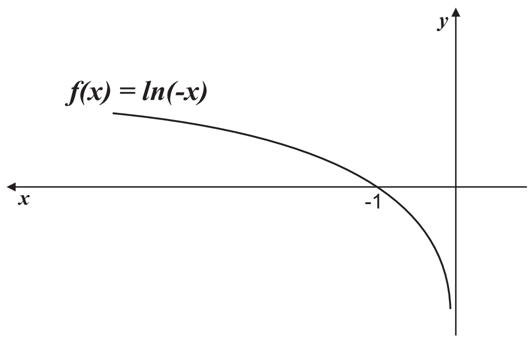
(27) Esboce o gráfico da função exponencial

$$f(x) = -2^x \,.$$



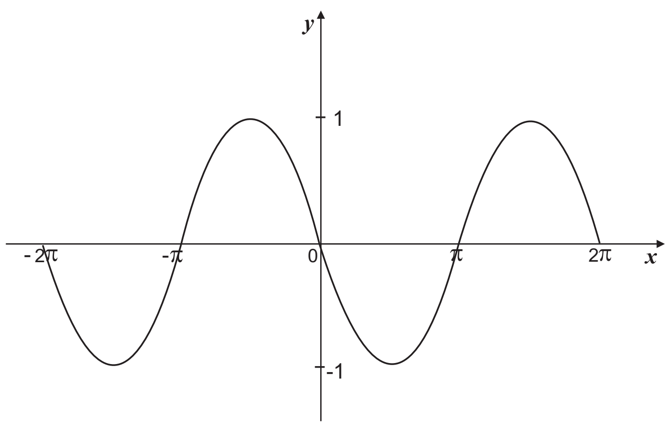
(28) Esboce o gráfico da função logarítmica

$$f(x) = \ln(-x)\,.$$



(29) Esboce o gráfico da função trigonométrica

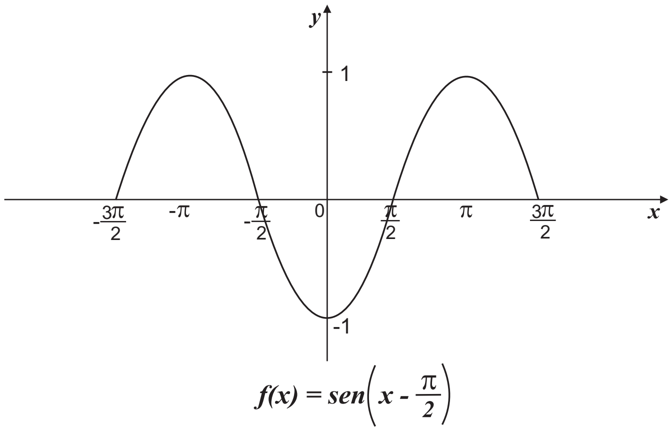
$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \,.$$



$$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

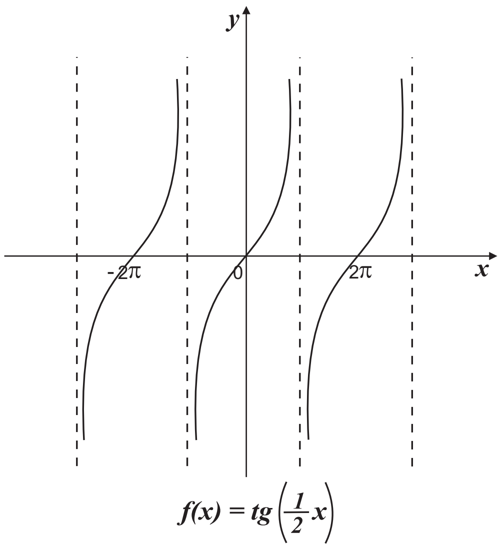
(30) Esboce o gráfico da função trigonométrica

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \ .$$



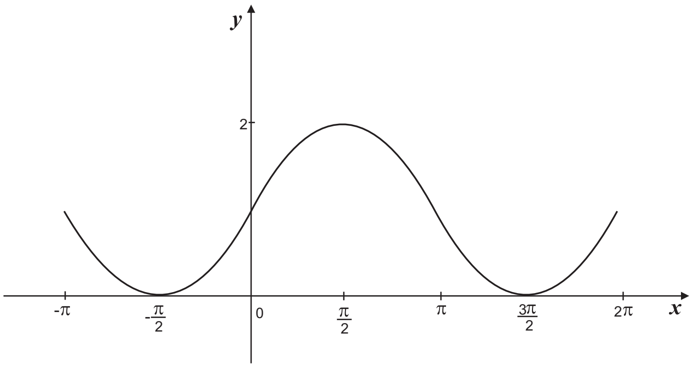
(31) Esboce o gráfico da função trigonométrica

$$f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \ .$$



(32) Esboce o gráfico da função trigonométrica

$$f(x) = 1 + \operatorname{sen} x\,.$$



f(x) = 1 + sen(x)

(33) Considere (funções hiperbólicas)

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,.$$

Então

a) Mostre que $\operatorname{senh}(x)$ é uma função ímpar;

b) Mostre que $\cosh(x)$ é uma função par.

Prova.

a) Com efeito,

$$\operatorname{senh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{+x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{senh}(x)\,.$$

Portanto, $\operatorname{senh}(x)$ é uma função ímpar. ■

b) De fato,

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)\,.$$

Assim sendo, $\cosh(x)$ é uma função par. ■

(34) Mostre que se $f(x) = \cosh(x)$ então

$$f[\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})] = x\,.$$

Prova. Com efeito, como $f(x) = \cosh(x)$ segue que

$$f[\ln(x+\sqrt{x^2-1})] = \frac{\left[e^{(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))} + e^{-(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))}\right]}{2}.$$

Por outro lado, lembre-se que

$$\ln u = \log_e u = y \Longleftrightarrow e^y = u \Longleftrightarrow \ln u = \ln e^y = y \ln e = y\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
f[\ln(x+\sqrt{x^2-1})] &= \frac{\left[e^{(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))} + e^{-(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))}\right]}{2} \\
&= \frac{\left[e^{(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))} + e^{(\ln(x+\sqrt{x^2-1})^{-1})}\right]}{2} \\
&= \frac{(x+\sqrt{x^2-1}) + (x+\sqrt{x^2-1})^{-1}}{2} \\
&= \frac{(x+\sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})}}{2} \\
&= \frac{\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2+1}{(x+\sqrt{x^2-1})}}{2} = \frac{x^2+2x\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)+1}{2(x+\sqrt{x^2-1})} \\
&= \frac{2x(x+\sqrt{x^2-1})}{2(x+\sqrt{x^2-1})} = x \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

(35) Determine a inversa da função

$$f(x) = \frac{x+a}{x-a}\,.$$

Solução. Com efeito, seja $y = f(x)$ então segue que

$$y = \frac{x+a}{x-a}\,.$$

Efetuando-se a troca de variáveis, obtém-se

$$\begin{aligned}
x = \frac{y+a}{y-a} &\Longleftrightarrow (y-a)x = y+a \Longleftrightarrow yx - ax = y + a \\
&\Longleftrightarrow yx - y = ax + a \Longleftrightarrow y(x-1) = a(x+1) \\
&\Longleftrightarrow y = \frac{a(x+1)}{(x-1)}\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f^{-1}(x) = \frac{a(x+1)}{(x-1)} \quad \text{desde que} \quad x \neq 1\,.$$

(36) Mostre que a função inversa de $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$ é a própria função f.

Prova. De fato, considerando $y = f(x)$ e realizando a troca de variável, tem-se

$$\begin{aligned} x = \frac{y+2}{2y-1} &\iff x(2y-1) = y+2 \iff 2xy - x = y+2 \\ &\iff 2xy - y = x+2 \iff y(2x-1) = x+2 \\ &\iff y = \frac{x+2}{2x-1}\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{2x-1} = f(x)\,. \qquad \blacksquare$$

(37) Encontre a função inversa de $g(x) = \sqrt{a-x}$.

Solução. Seja $g(x) = y$, a troca de variável permite escrever;

$$x = \sqrt{a-y} \iff x^2 = a - y \iff y = a - x^2\,.$$

Portanto, o resultado é dado por

$$g^{-1}(x) = a - x^2\,.$$

(38) Determine a inversa da função $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

Solução. Com efeito, efetuando a troca de variável e levando-se em conta que $h(x) = y$, tem-se

$$\begin{aligned} x = \frac{y^2}{y^2+1} &\iff x(y^2+1) = y^2 \iff xy^2 + x = y^2 \iff xy^2 - y^2 = -x \\ &\iff y^2(x-1) = -x \iff y^2 = \frac{-x}{x-1} \iff y^2 = \frac{x}{1-x} \\ &\iff y = \sqrt{\frac{x}{1-x}}\,. \end{aligned}$$

Esta é uma das possíveis escolhas. Como desafio (exercício) ao leitor deixa-se a verificação, em todos os exercícios acima, do campo de existência das funções ou as considerações necessárias para a existência de cada uma dessas funções.

(39) Se $\Phi(x) = \ln \dfrac{1-x}{x+1}$, então prove que $\Phi\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right) = \Phi(a) + \Phi(b)\,.$

Prova. De fato,

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) &= \ln \frac{1-\frac{a+b}{1+ab}}{\frac{a+b}{1+ab}+1} \\
&= \ln \frac{\frac{1+ab-a-b}{(1+ab)}}{\frac{(a+b)+(1+ab)}{(1+ab)}} = \ln \frac{1+ab-a-b}{a+b+1+ab} \\
&= \ln \frac{(1-a)(1-b)}{(a+1)(b+1)} = \ln \left[\frac{(1-a)}{(a+1)}\frac{(1-b)}{(b+1)}\right] \\
&= \ln \frac{(1-a)}{(a+1)} + \ln \frac{(1-b)}{(b+1)} = \Phi(a) + \Phi(b) \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

(40) Encontre a função inversa de

$$H(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Solução. Com efeito, utilizando-se $H(x) = y$ e a troca de variável, tem-se

$$\begin{aligned}
x = \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} &\iff x(\sqrt{y^2+1}) = y \iff x^2(y^2+1) = y^2 \\
&\iff y^2x^2 - y^2 = -x^2 \iff y^2 = \frac{-x^2}{x^2-1} \\
&\iff y^2 = \frac{x^2}{1-x^2} \iff y = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}\,.
\end{aligned}$$

Portanto, um inversa para a função $H(x)$ é dada por

$$H^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2}}\,.$$

Observe que a existência da função H^{-1} e a escolha da raiz quadrada positiva é apenas uma opção. O leitor deve analisar outras possibilidades, bem como o campo de existência desta função.

1.9 Exercícios Propostos

(1) Um retângulo cuja base tem comprimento x está inscrito em um círculo de raio 2. Expresse a área deste retângulo em função de x.

(2) Determine o domínio da função definida por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^3} + \frac{2x}{\sqrt{x+4}}$$

(3) Considere a função:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad R \to R \\ f(x) \quad &= 2x + 5 + |x - 5| \end{aligned}$$

Determine se a função é inversível. Caso afirmativo, escreve a expressão que representa a sua inversa.

(Sugestão: reescreva a função como uma função definida por mais de uma sentença. Faça a análise e o gráfico de cada uma destas sentenças, e determine a inversa de cada uma delas).

(4) Verifique se a função

$$f(x) = \frac{x}{2x+4}$$

é bijetora. Em caso afirmativo, determine a sua inversa.

(5) Dadas as funções

$$f(x) = 2x + 3 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt{x},$$

calcule, se possível:

a) (fog);

b) (fof);

(6) Dadas as funções

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{se} \quad x < 0 \\ 2x \quad \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \quad \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

determine (fog).

(7) Esboce os gráficos da funções abaixo, depois, determine o domínio e a imagem de cada uma delas.

a)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3-x} \quad \text{se} \quad x \leq -3 \\ \\ -x+4 \quad \text{se} \quad -3 < x < -1 \\ \\ |x^2-3| \quad \text{se} \quad |x| \leq 1 \\ \\ e^x \quad \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 2 + senx \quad \text{se} \quad x \leq 0 \\ \\ \dfrac{-x^2}{2} \quad \text{se} \quad 0 < x < 3 \\ \\ \sqrt{4-(x-5)^2} \quad \text{se} \quad 3 < x < 7 \\ \\ \log x \quad \text{se} \quad x \geq 7 \\ \end{cases}$$

c) $f(x) = |x^2 - 3x| + x + 1$

d) $f(x) = |3x - 6| + |-2x + 1|$

e) $f(x) = |1 + 2\cos x|$

f) $f(x) = 2 + \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$

g) $f(x) = -2 + \operatorname{cosec} x$

h) $f(x) = \text{arc sen}\, 2x$

8) Represente graficamente, dê o domínio e a Imagem de cada uma das funções abaixo.

a) $f(x) = 2x^2 - 4$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x+4}$

d) $f(x) = 2 + (x-1)^3$ **e)** $f(x) = \left|2x - \dfrac{1}{3}\right|$ **f)** $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$

$$\textbf{g)}\ f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x < 1 \\ x^2 & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ \sqrt{x} & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

(9) Encontre o domínio e a imagem da função inversa de

$$f(x) = \frac{x+2}{2x-1} \; .$$

(10) Sejam

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right) \qquad \text{e} \qquad \Psi(x) = \frac{1}{2}\left(a^x - a^{-x}\right) \; .$$

Mostre que

$$\Phi(x+y) = \Phi(x).\Phi(y) + \Psi(x).\Psi(y) \; .$$

(11) Construa os gráficos das seguintes funções

a) $f(x) = \cos(x + \dfrac{\pi}{2})$ **b)** $f(x) = \text{tg}\, \dfrac{x}{2}$ **c)** $f(x) = 1 + 2\text{sen}\, x$.

(12) Esboce o gráfico das seguintes funções

a) $f(x) = 5^x$ **b)** $f(x) = e^{x^2}$ **c)** $f(x) = \ln(x+1)$.

(13) Usando funções, encontre a solução de cada uma das inequações abaixo.

a) $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{3}{x-2}$ **b)** $\dfrac{\frac{x}{2} - 3}{4 - x} > 1$ **c)** $x^4 \geq x^2$.

(14) Determine a inversa das seguintes funções (bijetoras)

a) $f(x) = \dfrac{x+a}{x-a}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x-3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(15) Assinale com V (Verdadeira) ou F (Falsa).

( ) $f(x) = |x|$ é uma função par;

( ) o gráfico de $g(x) = 2x - \sqrt{2}$ é uma reta crescente;

( ) Se $f(x) = \sqrt{1-x}$ então o domínio de f é dado por $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ x > 1\}$;

( ) se f é inversível então existe f^{-1} e $(f \circ f^{-1})(x) = x$;

( ) se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2$ então f é bijetora ;

( ) Toda função constante é injetora ;

( ) Toda função bijetora admite inversa ;

( ) Toda função injetora e sobrejetora é par ;

( ) se $f(x) = x^2 + x$ então necessariamente $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$;

( ) se $h(x) = 1 + \sqrt{x}$ então $D_h = \mathbb{R} - \{0\}$;

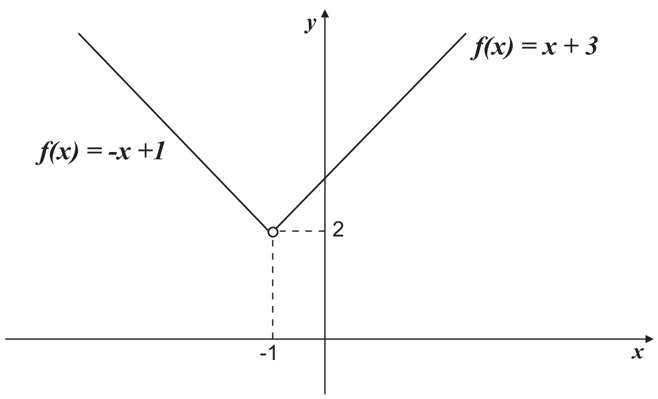
( ) o gráfico da função $g(x) = e^x$ é crescente desde que $D_g = \mathbb{R}_+$.

Capítulo 2

Limites

Considere a função

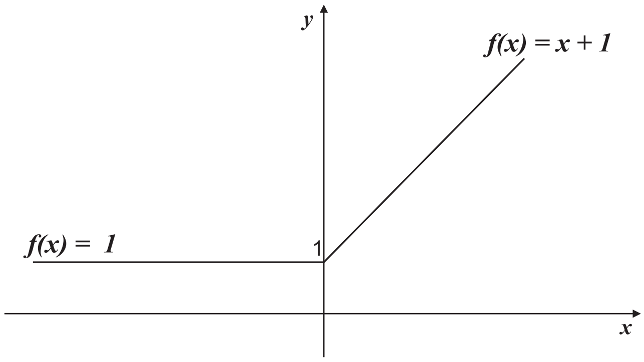
$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se} \quad x > -1 \\ -x+1 & \text{se} \quad x < -1 \end{cases}$$



Observando-se o gráfico desta função é fácil concluir que a medida que x assume valores maiores do que -1 isto é, $x > -1$, ou seja, por valores a direita de -1 a função que é dada por $f(x) = x + 3$ tende a assumir o valor 2. Por outro lado, a medida que x assume valores menores do que -1, isto é, $x < -1$, ou seja, por valores a esquerda -1 a função que é dada por $f(x) = -x + 1$ tende a assumir o valor 2. Neste sentido, dizemos que o limite da função f quando x tende a -1 é o valor 2. O leitor deve observar que a idéia intuita de limite de uma função independe dela estar ou não definida no ponto, no caso acima, temos uma função que não está definida em $x = -1$, porém, o limite desta função em $x = -1$ existe e tem valor 2.

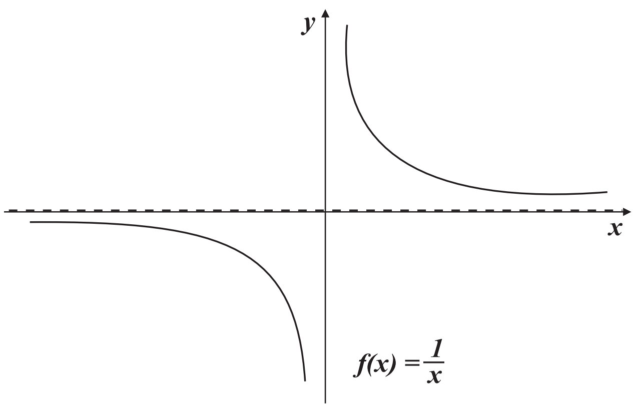
Seja a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ 1 \quad \text{se} & x < 0 \end{cases}$$



O gráfico da função f nos permite concluir que a medida que x assume valores a direita de zero $x \geq 0$ a função $f(x) = 1 + x$ tende a assumir o valor 1. Por outro lado, a medida que x assume valores a esquerda de zero $x < 0$ a função $f(x) = 1$ tende a assumir o valor 1. Portanto, neste caso, o limite da função f quando x tende a zero é igual a 1.

Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$



O gráfico acima permite concluir que a medida que x se aproxima de zero a função tende ao infinito. Observe que

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \\
x &= \frac{1}{10} \Rightarrow f\left(\frac{1}{10}\right) = 10 \\
x &= \frac{1}{100} \Rightarrow f\left(\frac{1}{100}\right) = 100 \\
x &= \frac{1}{1000} \Rightarrow f\left(\frac{1}{1000}\right) = 1000 \\
&\vdots \\
x &= \frac{1}{10.000} \Rightarrow f\left(\frac{1}{10.000}\right) = 10.000 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Portanto, a medida que x assume valores infinitamente pequenos, a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ assume valores infinitamente grandes. Assim sendo, quando x tende a zero a função f tende ao infinito.

2.1 Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I, contendo p, no qual f não precisa estar definida. Diz-se que o limite de f quando x aproxima-se de p é L se para todo $\epsilon > 0$, existe um δ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - p| < \delta\,.$$

Isto é,

$$\lim_{x \to p} f(x) = L\,.$$

Exemplos

(1) Prove, usando a definição de limite que, $\lim\limits_{x \to 1} (7x - 4) = 3$.

Prova. Com efeito, para todo $\epsilon > 0$, deve existir $\delta > 0$ tal que

$$|(7x - 4) - 3| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x - 1| < \delta\,.$$

A desigualdade envolvendo ϵ proporciona uma chave para a escolha do δ.

$$|(7x-4)-3| < \epsilon \Rightarrow |(7x-7)| < \epsilon \Rightarrow |7(x-1)| < \epsilon \Rightarrow 7|x-1| < \epsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\epsilon}{7}.$$

A última desigualdade permite a escolha do δ, isto é, fazendo

$$\delta = \frac{\epsilon}{7}, \text{ vem que } |(7x-4)-3| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x-1| < \delta\,.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 1}(7x-4) = 3\,. \qquad \blacksquare$$

(2) Prove, usando a definição de limite que, $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

Prova. Deve-se mostrar que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que,

$$|x^2-9| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x-3| < \delta.$$

Desta forma então

$$|x^2-9| < \epsilon \Rightarrow |(x-3)(x+3)| < \epsilon \Rightarrow |(x-3)||x+3| < \epsilon.$$

Precisa-se agora substituir $|(x-3)|$ por um valor constante . Então, deve-se, neste caso, supor que $0 < \delta \leq 1$. Daí da desigualdade $0 < |x-3| < \delta$, segue que

$$|x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow 5 < x+3 < 7.$$

Portanto, $|x+3| < 7$.
Agora, escolhe-se $\delta = min\{1, \frac{\epsilon}{7}\}$ para que se tenha $|x-3| < \delta$, desta forma, então

$$|x^2-9| = |(x-3)||(x+3)| < \delta.7 < \frac{\epsilon}{7}.7 = \epsilon\,.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9\,. \qquad \blacksquare$$

2.2 Limites Laterais

Definição. Seja f uma função definida em um intervalo aberto (p, c). Diz-se que $L \in \mathbb{R}$ é o limite á direita da função f quando x tende para p se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad p < x < p + \delta\,.$$

Isto é,

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = L\,.$$

Analogamente, seja f uma função definida em um intervalo aberto (c, p). Diz-se que $L \in \mathbb{R}$ é o limite à esquerda da função f quando x tende para p se para todo $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad p - \delta < x < p\,.$$

Ou seja,

$$\lim_{x \to p_-} f(x) = L\,.$$

Exemplos.

(1) Considere a função

$$f(x) = \frac{|x|}{x}\,.$$

Determine, se existe, os limites $\lim_{x \to 0^+} f(x) = L$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = L$

Solução. Observe que se $x > 0$, $|x| = x$, então $f(x) = \dfrac{x}{x} = 1$. Por outro lado, se $x < 0$, $|x| = -x$, então $f(x) = \dfrac{-x}{x} = -1$ logo,

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 \; se \quad x > 0 \\ -1 \; se \quad x < 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1\,.$$

2.3 Propriedades e Operações com Limites

Sejam $c \in \mathbb{R}$, f, e g duas funções tais que,

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to p} g(x) = M\,.$$

1) Unicidade

$\lim_{x \to p} f(x) = L$ e $\lim_{x \to p} f(x) = H \;\Rightarrow\; L = H$;

2) Soma de limites

$\lim_{x \to p} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to p} f(x) \pm \lim_{x \to p} g(x) = L \pm M$;

3) Produto de Escalar por Função

$\lim_{x \to p} c.f(x) = c.\lim_{x \to p} f(x) = c.L$;

4) Produto de funções

$\lim\limits_{x\to p} f(x).g(x) = \lim\limits_{x\to p} f(x).\lim\limits_{x\to p} g(x) = L.M$;

5) Quociente de funções

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to p} f(x)}{\lim\limits_{x\to p} g(x)} = \frac{L}{M} \quad M \neq 0\,.$$

6) Raiz

$\lim\limits_{x\to p} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to p} f(x)} = \sqrt[n]{L}\,, \quad L \geq 0$ se n par .

7) Exponencial

$$\lim_{x\to p} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to p} f(x)} = e^{L}\,.$$

8) Logaritmo

$\lim\limits_{x\to p} \ln\, f(x) = \ln\, \lim\limits_{x\to p} f(x) = \ln\, L\,.$

9) Teorema do Confronto

Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo p, exceto possivelmente em p, e

$$\text{se } \lim_{x\to p} f(x) = L = \lim_{x\to p} g(x), \quad \text{então} \quad \lim_{x\to p} h(x) = L\,.$$

10) Condição para existência do Limite

Se f é definida em um intervalo aberto contendo p, exceto possivelmente em p, então $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$ se, e somente se $\lim\limits_{x\to p^-} f(x) = \lim\limits_{x\to p^+} f(x) = L\,.$

2.4 Indeterminações

Na teoria dos limites chama-se indeterminações as expressões do tipo:

$$\frac{0}{0}\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad \infty - \infty\,, \quad 0.\infty\,, \quad 0^0\,, \quad 1^\infty \quad \text{e} \quad \infty^0\,.$$

Ao defrontar-se com qualquer uma destas indeterminações, o leitor deve utilizar uma outra estratégia para a solução do limite. Em linhas gerais procura-se reescrever a sentença ou expressão de forma equivalente e em seguida repetir o processo. O leitor terá oportunidade de lidar com vários exemplos, na seção de exercícios resolvidos, sobre este assunto.

2.5 Limites no Infinito

A idéia agora é analisar o comportamento de uma função f quando x assume valores positivos arbitrariamente grandes ou negativos arbitrariamente grandes em módulo.

Exemplo. Para contribuir com esta idéia, considere inicialmente a função

$$\begin{aligned} f: \ [1,\infty[\ &\mapsto \mathbb{R} \\ f(x) \ &= 1 + \frac{1}{x}\,. \end{aligned}$$

Observa-se que a medida que atribuí-se valores para $x \in [1,\infty[$ a função vai assumindo valores próximos de 1, isto é, os termos integrantes da função $\frac{1}{x}$ tornam-se muito pequenos a medida que x assume valores grandes. É fáci observar que a função tende a 1 a medida que x cresce. Simbolicamente, diz-se que $x \to \infty$ para o seguinte significado: a variável x não se aproxima de valor algum, pelo contrário, aumenta ilimitadamente.

Definição. Seja X um conjunto não limitado superiormente e $f : X \mapsto \mathbb{R}$. Diz-se que o limite de f quando x cresce ilimitadamente é L, se para todo $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que se $x \in X$ e $x > M$, então $|f(x) - L| < \epsilon$.
Denota-se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.

Resultado. Para todo numero natural positivo n, tem-se:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0\,.$$

2.6 Limites Infinitos

A idéia agora consiste em analisar o que ocorre com a função (ou o comportamento da função) quando x tende para certos valores reais. Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}\,.$$

O leitor pode observar que a medida que atribuí-se valores para x próximos de 2 a função vai assumindo valores arbitrariamente grandes. Ou seja, para $x = 2,5$ o valor de $f(2,5) = 4$ para $x = 2,01$ o valor de $f(2,01) = 10.000$ e para o valor de $x = 2,001$ o valor de f cresce absurdamente, isto é, chega ao valor $f(2,001) = 1.000.000$. Logo, é possível afirmar que a medida que x tende ao número 2 a função f tende para infinito.

Observe que infinito não é número, mas um símbolo que nesta definição significa que dado qualquer número positivo, por maior que seja, existem valores de f ainda maiores.

Definição. Seja f uma função definida num intervalo aberto I que contém o ponto b , exceto eventualmente em b . Diz-se que o limite de f quando x tende a b é $+\infty$ se para todo $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$, sempre que, $x \in I$ e $0 < |x - b| < \delta$.

Denota-se $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.

Resultado. Se n é um numero natural, então

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ n \text{ é par} \\ -\infty & \text{se } \ n \text{ é impar} . \end{cases}$$

Resultado. Sejam f, g, h, m funções tais que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to a} g(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to a} h(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} m(x) = c\,,$$

onde c é uma constante não nula. Tem-se então

(a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) = +\infty$.

(b) $\lim\limits_{x \to a} f(x).g(x) = +\infty$.

(c) $\lim\limits_{x \to a} f(x).h(x) = -\infty$.

(d) $\lim\limits_{x \to a} f(x) + m(x) = +\infty$.

(e) $\lim\limits_{x \to a} h(x) + m(x) = -\infty$.

(f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{m(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad c > 0 \\ -\infty & \text{se} \quad c < 0\,. \end{cases}$

(g) $\lim\limits_{x\to a} f(x)m(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad c > 0 \\ -\infty & \text{se} \quad c < 0\,. \end{cases}$

2.7 Limites Fundamentais

A demonstração dos limites abaixo será feita na seção sobre aplicação da derivada. Aqui apenas enuncia-se os resultados que serão úteis na solução de alguns exercícios propostos. São os seguintes os famosos limites fundamentais:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad a > 0$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x\to +\infty} \sqrt[x]{x} = 1$$

2.8 Limites: Exercícios Resolvidos

(1) Calcule o limite $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 3x - 4}$.

Solução. Com efeito, tem-se aqui uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Para levantar esta indeterminação (calcular este limite) deve-se fatorar o numerador e o denominador utilizando-se as raízes destes polinômios. Em seguida, realizando-se algumas manipulações algébricas, o resultado é dado por

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 3x - 4} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+5)(x+1)}{(x-4)(x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x+5}{x-4} = -\frac{4}{5}\,.$$

(2) Dar o valor, caso exista, do $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{25 + 3t} - 5}{t}$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\dfrac{0}{0}$. Neste caso, para levantar esta indeterminação deve-se utilizar o artifício do conjugado. O resultado é dado por

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{25+3t}-5}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt{25+3t}-5)(\sqrt{25+3t}+5)}{t(\sqrt{25+3t}+5)} = \lim_{t\to 0}\frac{25+3t-25}{t(\sqrt{25+3t}+5)}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{3}{\sqrt{25+3t}+5} = \frac{3}{10}\,.\end{aligned}$$

(3) Calcule o $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

Solução. Novamente, a indeterminação é do tipo $\dfrac{0}{0}$. Neste caso, a estratégia mais indicada é a utilização de uma substituição de variável. Ou seja,

$$t=\sqrt[6]{x}\quad\text{então}\quad t^6=x\,;\ \text{ao mesmo tempo}\quad x\to 1\quad\text{então}\quad t\to 1\,.$$

Por outro lado, (t^2-1) e (t^3-1) são polinômios divisíveis por $(t-1)$; pois $t=1$ é raiz. Portanto,

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}\,.$$

(4) Determine o $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a^2+bx}-a}{x}$, $\quad a>0$.

Solução. Com efeito, para levantar a indeterminação que é do tipo $\dfrac{0}{0}$, utiliza-se mais uma vez o artifício do conjugado. O resultado é dado por

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a^2+bx}-a}{x}\cdot\frac{(\sqrt{a^2+bx}+a)}{(\sqrt{a^2+bx}+a)} &= \lim_{x\to 0}\frac{a^2+bx-a^2}{x(\sqrt{a^2+bx}+a)}=\lim_{x\to 0}\frac{bx}{x(\sqrt{a^2+bx}+a)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{b}{(\sqrt{a^2+bx}+a)}=\frac{b}{2a}\,.\end{aligned}$$

(5) Calcule o $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$.

Solução. A estratégia para levantar a indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$, consiste em utilizar-se o método de substituição de variáveis, ou seja,

$$\sqrt[3]{x}=t\quad\text{então}\quad x=t^3\,;\quad\text{ao mesmo tempo}\quad x\to 1\quad\text{então } t\to 1\,.$$

Como consequência;

$$\sqrt[3]{x}=t\quad\text{então}\quad(\sqrt[3]{x})^2=\sqrt[3]{x^2}=t^2\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2} &= \lim_{t\to 1}\frac{t^2-2t+1}{(t^3-1)^2}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)^2}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}\\ &= \lim_{t\to 1}\frac{1}{(t^2+t+1)^2}=\frac{1}{9}\,.\end{aligned}$$

(6) Encontre o $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{x+8}$.

Solução. Tem-se aqui uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para levantar esta indeterminação a técnica é dividir simultaneamente o numerador e denominador pelo termo de maior grau do polinômio. Assim sendo, levando-se em conta que $x\neq 0$. Dividindo-se o numerador e denominador por x. O resultado segue

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{x+8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x}}{1+\frac{8}{x}}=\frac{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}2+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}}{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x}}\,.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+5}{x+8}=\frac{2+(5\cdot 0)}{1+(8\cdot 0)}=2\,.$$

(7) Calcule o $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3}}$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. A técnica é efetuar a divisão simultânea do numerador e denominador utilizando-se o termo de maior grau. Observa-se que $x\to+\infty$ então $\sqrt{x^2}=x$.

Portanto, o resultado é dado por

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2}}}{\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}=\frac{1+0}{\sqrt{1-0}}=1\,.$$

(8) Determine o valor do $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3}}$.

Solução. Levando-se em conta que a indeterminação é do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. A técnica é similiar ao exercício anterior. Ou seja, neste caso, $x\to-\infty$ então $\sqrt{x^2}=-x$.

Portanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x+1}{-x}}{\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{-\sqrt{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1-\dfrac{3}{x^2}}}\,.$$

Assim sendo,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{-1-0}{-\sqrt{1-0}}=\frac{-1}{-1}=1\,.$$

(9) Encontre o valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^7+2x^2-1\,.$

Solução. A solução é simples, o resultado é obtido da seguinte forma;

$$\lim_{x\to+\infty} 4x^7+2x^2-1=\lim_{x\to+\infty} x^7(4+\frac{2}{x^5}-\frac{1}{x^7})=+\infty\,.\,(4+0-0)=+\infty\,.$$

(10) Determine o valor do $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1}{|x-3|}\,.$

Solução. Com efeito, se $x\to3^+$ então $x>3$ e portanto, $|x-3|=x-3\,.$
Como, $x-3\to0$ por valores maiores do que $3\,,$ isto é, $(x-3>0)$. segue que

$$\lim_{x\to3^+}\frac{1}{|x-3|}=\lim_{x\to3^+}\frac{1}{x-3}=+\infty\,.$$

(11) Determine o valor do $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\,.$

Solução. É fácil observar que, a função e^x tende a infinito primeiro (ou mais rapidamente) do que a função x.
Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\,.$$

(12) Calcule o valor do $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x - 3^x$.

Solução. É interessante observar, neste caso que

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x - 3^x = \lim_{x\to+\infty} 3^x \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1\right] .$$

Como a função 3^x quando $x \to +\infty$ tende a infinito primeiro (ou mais rapidamente) do que a função 2^x segue que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0 .$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to+\infty} 3^x = +\infty .$$

Desta forma, tem-se

$$\lim_{x\to+\infty} 3^x \left(\frac{2^x}{3^x} - 1\right) = -\infty.$$

Observação. Deixa-se como atividade ao leitor a construção dos gráficos das funções apresentadas nos exemplos (11) e (12), pois, a observação das curvas no gráfico deverão permitir uma visão clara sobre o comportamento destas funções quando x for suficientemente grande.

(13) Utilize a definição de limite para provar que:

(a) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1) = 3$.

Prova. Com efeito, dado $\epsilon > 0$ deve-se encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$|(2x-1) - 3| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad |x-2| < \delta .$$

De fato,

$$|(2x-1) - 3| = |2x - 1 - 3| = |2(x-2)| = 2|x-2| < \epsilon = |x-2| < \frac{\epsilon}{2} .$$

Escolhendo-se $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$ segue que, a função $(2x-1)$ tende a 3 a medida que x se aproxima de 2.

Portanto,

$$\lim_{x\to 2}(2x-1) = 3 .$$

(b) $\lim_{x\to 1}(5x-3) = 2\,.$

Prova. Dado $\epsilon > 0$ deve-se encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$|(5x-3)-2| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad |x-1| < \delta\,.$$

De fato,

$$|(5x-3)-2| = |5x-3-2| = |5(x-1)| = 5|x-1| < \epsilon = |x-1| < \frac{\epsilon}{5}\,.$$

Escolhendo-se $\delta = \dfrac{\epsilon}{5}$ segue que, a função $(5x-3)$ tende a 2 a medida que x se aproxima de 1.

Portanto,

$$\lim_{x\to 1}(5x-3) = 2\,.$$

(c) $\lim_{x\to 3}(4x-1) = 11\,.$

Prova. Dado $\epsilon > 0$ deve-se encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$|(4x-1)-11| < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad |x-3| < \delta\,.$$

De fato,

$$|(4x-1)-11| = |4x-1-11| = |4x-12| = 4|x-3| < \epsilon = |x-3| < \frac{\epsilon}{4}\,.$$

Escolhendo-se $\delta = \dfrac{\epsilon}{4}$ segue que, a função $(4x-1)$ tende a 11 a medida que x se aproxima de 3.

Portanto,

$$\lim_{x\to 3}(4x-1) = 11\,.$$

(14) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & se \quad x < 2 \\ 4 - x^2 & se \quad x > 2\,. \end{cases}$$

Calcule:

(a) $\lim_{x\to 2-} f(x)\,;$

(b) $\lim_{x\to 2+} f(x)$;
(c) $\lim_{x\to 2} f(x)$;
(d) Esboce o gráfico da função f .

Solução.

(a) O resultado do $\lim_{x\to 2-} f(x)$ é obtido levando-se em conta a definição da função f ou seja, neste caso tem-se,

$$\text{para} \quad x \to 2^{-} \quad \text{o mesmo que} \quad x < 2 \quad \text{portanto,} \quad f(x) = x^2 - 4\,.$$

Assim sendo,

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 - 4 = 0\,.$$

(b) Neste caso, o resultado do $\lim_{x\to 2+} f(x)$ é obtido levando-se em conta a definição da função f ou seja, neste caso tem-se,

$$\text{para} \quad x \to 2^{+} \quad \text{o mesmo que} \quad x > 2 \quad \text{portanto,} \quad f(x) = 4 - x^2\,.$$

Assim sendo,

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2} 4 - x^2 = 0\,.$$

(c) Concluí-se de (a) e (b) que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 2\,.$$

(d) Deixa-se ao leitor a tarefa de construir o gráfico da função f. A análise do mesmo deverá permitir que o leitor veja intuitivamente os resultados (a),(b) e (c).

(15) Seja

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & se \quad x \geq 1 \\ 2x & se \quad x < 1\,. \end{cases}$$

Então calcule o limite

$$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}\,.$$

Solução. Com efeito, obter o limite da função f quando $x \to 1^{+}$ é o mesmo que considerar $x \geq 1$ o que significa que a função a ser utilizada é $f(x) = x + 1$. Como neste caso, $f(1) = 2$ segue que

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} = 1\,.$$

Deixa-se como exercício ao leitor, que encontre $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$, depois, que verifique se $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$ existe.

(16) Considere a função

$$g(x) = \begin{cases} x & se \quad x \geq 2 \\ \frac{x^2}{2} & se \quad x < 2\,. \end{cases}$$

Então determine o valor de

$$\lim_{x\to 2-} \frac{g(x) - g(2)}{x-2}\,.$$

Solução. Observa-se que quando $x \to 2^-$ a função a ser considerada será $g(x) = \dfrac{x^2}{2}$, pois $x < 2$. Neste caso, $g(2) = 2$ e portanto,

$$\lim_{x\to 2-} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{x^2}{2} - 2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{x^2-4}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{2(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{2} = 0\,.$$

(17) Determine o valor do $\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{|x-1|}{x-1}$.

Solução. A função

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1 & se \quad x \geq 1 \\ -x+1 & se \quad x < 1\,. \end{cases}$$

Deseja-se encontrar o limite quando $x \to 1^-$. Então, neste caso, é equivalente a escolher a função quando $x < 1$, ou seja, $f(x) = -x+1$.

Assim sendo,

$$\lim_{x\to 1-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{-x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1\,.$$

(18) Calcule o valor do $\lim\limits_{x\to 16} \sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x}}$.

Solução. Com efeito,

$$\lim_{x\to 16} \sqrt[4]{\frac{x+1}{x}} = \sqrt[4]{\frac{16+1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{17}{16}} = \frac{\sqrt[4]{17}}{2}\,.$$

(19) Determine o valor do $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x^2 - x - 1}}$.

Solução. Neste caso, tem-se

$$\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 3x + 4}{2x^2 - x - 1}} = \frac{\sqrt[3]{4^2 - 3.4 + 4}}{2.(4)^2 - 4 - 1} = \sqrt[3]{\frac{16 - 12 + 4}{32 - 4 - 1}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

(20) Calcule $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt[3]{2 + 5x - 3x^3}}{x^2 - 1}$.

Solução. De fato,

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt[3]{2 + 5x - 3x^3}}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt[3]{2 + 5.3 - 3.(3)^3}}{3^2 - 1} = \frac{\sqrt[3]{2 + 15 - 81}}{9 - 1} = \frac{\sqrt[3]{-64}}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

(21) Determine o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5}{2x^3 + 6}$.

Solução. A solução é dada por

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5}{2x^3 + 6} = \frac{2^2 - 5}{2.(2)^3 + 6} = \frac{4 - 5}{16 + 6} = -\frac{1}{22}.$$

(22) Calcule $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$.

Solução. O resultado é dado por

$$\lim_{x \to 1} \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4} = \sqrt[3]{1^2 - 5.1 + 4} = \sqrt[3]{1 - 5 + 4} = 0.$$

(23) Determine o valor de $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$.

Solução. Ao efetuar os cálculos observa-se uma indeterminação, isto é, $\dfrac{0}{0}$. Para levantar esta indeterminação realiza-se a decomposição dos polinômios utilizando-se as suas raízes, o resultado é dado por

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12} = \lim_{x \to -3} \frac{(x + 3)(x + 2)}{(x + 3)(x - 4)} = \lim_{x \to -3} \frac{(x + 2)}{(x - 4)} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}.$$

(24) Calcule $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$.

Solução. Da mesma forma como no caso anterior, o calculo do limite resulta numa indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Para levantar esta indeterminação o melhor método é a substituição de variável e depois a divisão de polinômios. Com efeito, seja

$$x + 1 = t^3 \quad \text{então} \quad \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{t^3} = t \quad \text{e} \quad x = t^3 - 1\,.$$

Por outro lado, $x \to 0$ então $t \to 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} &= \lim_{t \to 1} \frac{\sqrt[3]{t^3} - 1}{t^3 - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{t-1}{t^3 - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{(t-1)}{(t-1)(t^2 + t + 1)} \\ &= \lim_{t \to 1} \frac{1}{t^2 + t + 1} = \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

(25) Determine o valor de $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 5x - 14}{x - 2}$.

Solução. Efetuando-se o cálculo do limite observar-se uma indeterminação do mesmo tipo anterior. Utilizando-se a decomposição de polinômios, segue que,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+7)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2}(x + 7) = 9\,.$$

(26) Obtenha o valor do $\lim_{x \to 1} (\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{x-5}{x^2 + 2x - 3})$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\infty - \infty$. Para encontrar a solução deste problema realiza-se as seguintes manipulações algébricas;

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{x-5}{x^2 + 2x - 3} \right) &= \lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{(x-1)} + \frac{(x-5)}{(x-1)(x+3)} \right) \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x+3) + (x-5)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 2}{(x-1)(x+3)} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \to 1} \frac{2}{(x+3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

(27) Calcule $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$.

Solução. Com efeito,

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x+4)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{(x+4)}{(x-1)} = \frac{8}{3}.$$

(28) Determine o valor do $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{x+1}-3}{x-8}$.

Solução. Para encontrar a solução utiliza-se uma mudança de variável, depois a decomposição de polinômios, pois está é mais uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.
Com efeito, seja

$$x+1=t^2 \quad \text{então} \quad t^2-1=x \quad \text{e como} \quad x\to 8 \quad \text{então} \quad t\to 3.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{x+1}-3}{x-8} = \lim_{t\to 3} \frac{t-3}{t^2-9} = \lim_{t\to 3} \frac{(t-3)}{(t-3)(t+3)} = \lim_{t\to 3} \frac{1}{(t+3)} = \frac{1}{6}.$$

textbf(29) Calcule o valor do $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

Solução. Como a indeterminação é do tipo $\dfrac{0}{0}$. Para levantar esta inderminação considere o método da multiplicação pelo conjugado do numerador; o resultado pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} &= \lim_{x\to 7} \frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(2+\sqrt{x-3})(x^2-49)} \\
&= \lim_{x\to 7} \frac{4-(x-3)}{(2+\sqrt{x-3})(x-7)(x+7)} \\
&= \lim_{x\to 7} \frac{-(x-7)}{(2+\sqrt{x-3})(x-7)(x+7)} \\
&= \lim_{x\to 7} \frac{-1}{(2+\sqrt{x-3})(x+7)} = -\frac{1}{56}.
\end{aligned}$$

(30) Determine o valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$.

Solução. Para levantar esta indeterminação (que é do tipo $\dfrac{0}{0}$) utiliza-se o método do conjugado. O resultado é dado por

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(x+2)-2}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} .
\end{aligned}$$

(31) Calcule o $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quando a função f for dada por:

(a) $f(x) = x^2$;

(b) $f(x) = \sqrt{x}$;

(c) $f(x) = 4$.

Solução.

(a) $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2x)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2x) = 2x .
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \qquad (\textit{conjugado}) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} .
\end{aligned}$$

(c) $f(x) = 4$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4-4}{h} = 0\,.$$

(32) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)}$.

Solução. Com efeito, decompondo-se o numerador, tem-se

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to -2} \frac{x(x^2 + 4x + 4)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to -2} \frac{x(x+2)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x\to -2} \frac{x(x+2)}{(x-3)} = 0\,.$$

(33) Encontre o valor de $\displaystyle\lim_{x\to \frac{5}{2}} \frac{2x^2 - 3x - 5}{2x-5}$.

Solução. De fato, utilizando-se a decomposição do polinômio do numerador, tem-se

$$\lim_{x\to \frac{5}{2}} \frac{2x^2 - 3x - 5}{2x-5} = \lim_{x\to \frac{5}{2}} \frac{2x^2 - 3x - 5}{2x-5} = \lim_{x\to \frac{5}{2}} \frac{(x+1)(2x-5)}{(2x-5)} = \lim_{x\to \frac{5}{2}} (x+1) = \frac{7}{2}\,.$$

(34) Determine o valor de $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$.

Solução. Com efeito,

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)}{(x+2)} = \frac{-2}{1} = -2\,.$$

(35) Calcule o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x-2}$.

Solução. Decompondo-se o polinômio do numerador, tem-se

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 4\,.$$

(36) Encontre o valor de $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^4 - 16}{h}$.

Solução. Efetuando-se o cálculo do limite tem-se uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Para levantar a indeterminação, isto é, obter a solução efetua-se algumas manipulações algébricas. O resultado segue então, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^4-16}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(h+2)^2(h+2)^2-16}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(h^2+4h+4)^2-16}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^4+2(4h+4)h^2+(4h+4)^2-16}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^4+8h^3+8h^2+16h^2+32h+16-16}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(h^3+8h^2+24h+32)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(h^3+8h^2+24h+32)=32\,.
\end{aligned}$$

(37) Determine o valor de $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{25+3t}-5}{t}$.

Solução. Utilizando-se a técnica do conjugado do numerador, tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{25+3t}-5}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt{25+3t}-5)(\sqrt{25+3t}+5)}{t(\sqrt{25+3t}+5)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{25+3t-25}{t(\sqrt{25+3t}+5)}=\lim_{t\to 0}\frac{3t}{t(\sqrt{25+3t}+5)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{3}{(\sqrt{25+3t}+5)}=\frac{3}{10}\,.
\end{aligned}$$

(38) Encontre o valor de $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+bt}-1}{t}$.

Solução. O cálculo do limite resulta numa indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$, mas, utilizando-se a técnica do conjugado, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+bt}-1}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt{1+bt}-1)(\sqrt{1+bt}+1)}{t(\sqrt{1+bt}+1)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1+bt-1}{t(\sqrt{1+bt}+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{b}{(\sqrt{1+bt}+1)}=\frac{b}{2}\,.
\end{aligned}$$

(39) Determine o valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{-x}$.

Solução. Utilizando-se a técnica do conjugado, haja vista que a indeterminação é idêntica ao caso anterior, segue que.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{-x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{-x(\sqrt{1+x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{-x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{-x(\sqrt{1+x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{(\sqrt{1+x}+1)} = -\frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

(40) Calculo o valor de $\lim\limits_{y\to a}\dfrac{\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{a}}{y-a}$, $\quad a\neq 0\,.$

Solução. O cálculo do limite resulta numa indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Com o objetivo de levantar esta indeterminação o melhor método é a substituição de variável e depois a divisão de polinômios. Com efeito, seja

$$\sqrt[3]{y}=t \quad \text{então} \quad t^3=y \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{a}=b \quad \text{então} \quad a=b^3\,.$$

Por outro lado, $y\to a$ então $t\to b$. Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{y\to a}\frac{\sqrt[3]{y}-\sqrt[3]{a}}{y-a} &= \lim_{t\to b}\frac{t-b}{t^3-b^3} = \lim_{t\to b}\frac{t-b}{(t-b)(t^2+bt+b^2)}\\ &= \lim_{t\to b}\frac{1}{(t^2+bt+b^2)} = \frac{1}{3b^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}\,.\end{aligned}$$

(41) Calcule o valor de $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\right)$.

Solução. Mais uma vez tem-se uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Com o objetivo de levantar esta indeterminação o melhor método é a substituição de variável, entretanto, neste caso, deve-se escolher uma substituição que satisfaça simultaneamente as raízes do numerador e do denominador. Assim sendo, deve-se optar pelo mínimo múltiplo comum dos índices destas raízes, em seguida a solução é obtida mediante a divisão de polinômios. Com efeito, seja

$$\sqrt[12]{x}=t \quad \text{então} \quad t^{12}=x \quad \text{portanto,} \quad \sqrt[4]{x}=t^3 \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{x}=t^4\,.$$

Por outro lado, $x \to 1$ então $t \to 1$. Segue então que,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}\right) &= \lim_{t\to 1}\frac{t^4-1}{t^3-1} = \frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}\\
&= \lim_{t\to 1}\frac{(t+1)(t^2+1)}{(t^2+t+1)} = \frac{4}{3}\,.
\end{aligned}$$

(42) Encontre o valor de $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$.

Solução. Como $x \to \infty$ então $x \geq 0$. Desta forma, por definição, tem-se $|x| = x$. Portanto,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x+x}{7x-5x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x} = 2\,.$$

(43) Determine o valor de $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|}$.

Solução. Como $x \to -\infty$ então $x < 0$. Desta forma, por definição, tem-se $|x| = -x$. Portanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+|x|}{7x-5|x|} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-x}{7x+5x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{12x} = \frac{1}{6}\,.$$

(44) Calcule o valor de $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\frac{\sqrt{2t^2-7}}{t+3}$.

Solução. Como $t \to -\infty$ então $t < 0$ o que significa que $|t| = -t$. Portanto, a solução é equivalente a efetuar a divisão do numerador e do denominador por $-t$, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to-\infty}\frac{\sqrt{2t^2-7}}{t+3} &= \lim_{t\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{2t^2-7}}{|t|}}{\frac{t+3}{-t}}\\
&= \lim_{t\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{2t^2-7}{|t|^2}}}{-1-\frac{3}{t}}\\
&= \lim_{t\to-\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{7}{|t|^2}}}{-1-\frac{3}{t}} = -\sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$

(45) Determine o valor de $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \frac{3-y}{\sqrt{5+4y^2}}$.

Solução. Observe que $y \to \infty$ então $y \geq 0$. Portanto, segue que $|y| = y$. Assim sendo, a solução desejada é obtida mediante a utilização da divisão do numerador e denominador (pelo termo de maior grau), isto é, por y. O resultado é dado por

$$\lim_{y\to\infty} \frac{3-y}{\sqrt{5+4y^2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{\frac{3}{y}-1}{\sqrt{\frac{5}{|y|^2}+4}} = \frac{-1}{\sqrt{4}} = -\frac{1}{2}.$$

(46) Calcule o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4}$.

Solução. O leitor deve observar que x tende a 2 pela direita (ou seja, por valores maiores do que 2). Na verdade, o denominador é sempre positivo, haja vista, que os valores que x vem assumindo são valores maiores do que 2 e portanto, se transformando num número sempre maior do que 4. Assim sendo, o resultado da operação no denominador será sempre maior do que zero, e somente será zero quando x assumir o valor 2. O resultado é dado por, abusando da notação para melhor entendimento,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} \mapsto \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

(47) Determine $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4}$.

Solução. A solução é análoga ao caso anterior, o resultado é dado por

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} \mapsto \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

(48) Considere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & se \quad x < 0 \\ \log x & se \quad 0 < x \leq 1 \\ -x^2+x+2 & se \quad 1 < x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2} & se \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcule, se existir, os seguintes limites;

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)$

Solução. Neste caso, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, pois, $x \to 0^-$ significa que $x < 0$. Assim sendo,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty\,.$$

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

Solução. Com efeito, $x \to 0^+$ significa que x tende a zero por valores maiores do que zero. Assim sendo, $f(x) = \log x$. Portanto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log x = \log\left(\lim_{x\to 0^+} x\right) = -\infty\,.$$

(c) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

Solução. O fato de $x \to 1^-$ significa que x tende a 1 por valores de x menores do que 1. Assim sendo, $f(x) = \log x$. Portanto,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \log x = \log\left(\lim_{x\to 1^-} x\right) = \log 1 = 0\,.$$

(d) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

Solução. Agora $x \to 1^+$ ou seja, x tende a 1 por valores maiores do que 1. Assim sendo, $f(x) = -x^2 + x + 2$. Portanto,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-x^2 + x + 2) = 2\,.$$

(e) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

Solução. Observe que $x \to 2^-$ significa que x tende a dois por valores de x menores do que 2. Portanto, $f(x) = -x^2 + x + 2$. Assim sendo,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (-x^2 + x + 2) = 2\,.$$

(f) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

Solução. Neste caso, $x > 2$, pois, $x \to 2^+$. Portanto, $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Assim sendo,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} \mapsto \frac{1}{0^+} = +\infty\,.$$

(49) Se $\epsilon = 0,02$, encontre $\delta > 0$ para que se tenha;

$$\lim_{x\to 2} 5 - 4x = -3\,.$$

Solução. O Objetivo deste problema consiste em a partir de $\epsilon = 0,02$, encontrar $\delta > 0$ para que se tenha $\lim\limits_{x\to 2} 5 - 4x = -3$. Senão vejamos, por definição

$$|(5-4x-(-3)| = |5-4x+3| = |8-4x| = 4|2-x| = 4|x-2| < \epsilon = 0,02 \Rightarrow |x-2| < \frac{0,02}{4}\,.$$

Assim sendo, o escolhido será $\delta = \dfrac{0,02}{4}$.

(50) Determine o valor do $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+2}$.

Solução. De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+2} &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+1}+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+2}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{2}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{2}\\
&= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x}.
\end{aligned}$$

Para resolver este último limite efetua-se uma substituição de variáveis para que seja possível utilizar o limite fundamental cuja solução é conhecida. Assim sendo, seja $2x+1 = y$ então como, $x \to \infty$ segue que $y \to \infty$. O resultado é dado por

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x} &= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{\frac{y-1}{2}}\\
&= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{\frac{y}{2}}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}\\
&= \left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{y}\right]^{\frac{1}{2}}\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}\\
&= \left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{y}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[e^2\right]^{\frac{1}{2}} = e\,.
\end{aligned}$$

Observe que a substituição $\dfrac{1}{t} = \dfrac{2}{y}$ equivale a dizer que $t \to \infty$, pois, $y \to \infty$, bem como $y = 2t$. Assim sendo, o limite em questão se transforma num limite fundamental, isto é,

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^y = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^2 = e^2 .$$

O que justifica a conclusão acima.

(51) Calcule o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2^x-4}{x-2}$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\dfrac{0}{0}$. A saída é buscar uma manipulação algébrica, que transforme o numerador no limite fundamental,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a .$$

Assim sendo,

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x-4}{x-2} \quad = \quad \lim_{x\to 2}\frac{4\left(\frac{2^x}{2^2}-1\right)}{x-2} .$$

Efetuando-se a substituição $x-2=y$, segue que, $y\to 0$ e portanto,

$$\lim_{x\to 2}\frac{4\left(\frac{2^x}{2^2}-1\right)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{4\left(2^{x-2}-1\right)}{x-2} = 4\lim_{y\to 0}\frac{2^y-1}{y} = 4\ln 2 .$$

(52) Determine o valor do $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax}{x}$.

Solução. A solução deste problema passa pela utilização do limite fundamental,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x} = 1 .$$

De fato,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen\,ax}{\cos ax}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{sen\,ax}{x}\,\frac{1}{\cos ax} = a .$$

Observe que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos ax} = \frac{1}{1} = 1 .$$

Já o outro limite, efetua-se uma substituição para que seja possível usar o limite fundamental, ou seja, $ax=y$ então $\dfrac{y}{a}=x$. Portanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,ax}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{sen\,y}{\frac{y}{a}} = a\lim_{y\to 0}\frac{sen\,y}{y} = a.1 = a .$$

Assim sendo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{x} = a\,.$$

(53) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{5^x - 125}{x-3}$.

Solução. É uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Neste caso, realiza-se uma manipulação algébrica, depois, uma substituição de variável para que o resultado seja o limite fundamental,

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a\,.$$

Com efeito,

$$\lim_{x\to 3} \frac{5^x - 125}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{5^3\left(\frac{5^x}{5^3} - 1\right)}{x-3} = 125 \lim_{x\to 3} \frac{5^{x-3} - 1}{x-3}\,.$$

Para resolver o último limite, considera-se a substituição $x - 3 = y$, logo, $y \to 0$, pois, $x \to 3$. Assim sendo,

$$125 \lim_{x\to 3} \frac{5^{x-3} - 1}{x-3} = 125 \lim_{y\to 0} \frac{5^y - 1}{y} = 125.\ln 5\,.$$

(54) Encontre o valor do $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)$.

Solução. A solução deste limite é bem intuitiva e poderá ser demonstrada no capítulo sobre derivadas, onde a Regra de L'hospital será de grande valor. Dentro do que tem-se disponíveis na teoria, a solução pode ser entendida de maneira simples utilizando-se a representação gráfica das duas funções. Ou seja, o gráfico de x e de e^x, que são as funções envolvidas neste limite, nos fornecem a informação de que a função e^x tende a infinito muito mais rápido do que a função x. Neste caso, então

$$\frac{x}{e^x} \mapsto 0\,.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right) = 0\,.$$

(55) Determine o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{10^{x-2} - 1}{x-2}$.

Solução. A solução deste limite é dada mediante a utilização do limite fundamental

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a\,,$$

após uma substituição de variável. Ou seja, $x - 2 = y$ segue que

$$\lim_{x\to 2} \frac{10^{x-2} - 1}{x-2} = \lim_{y\to 0} \frac{10^y - 1}{y} = \ln 10\,.$$

(56) Calcule o valor do $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6x - sen\,2x}{2x + 3sen\,4x}$.

Solução. Observe que $x \to 0$ o que significa que x não é zero. Assim sendo, divide-se o numerador e denominador simultaneamente por x o resultado é dado por

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{6x - sen2x}{2x + 3sen4x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{6x - sen2x}{x}}{\frac{2x+3sen4x}{x}} \\
- &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{6x}{x} - \frac{sen2x}{x}}{\frac{2x}{x} + \frac{3sen4x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{6 - \frac{sen2x}{x}}{2 + \frac{3sen4x}{x}} \\
&= \frac{\left[6 - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen2x}{x}\right]}{\left[2 + 3\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen4x}{x}\right]}\,.
\end{aligned}$$

Entretanto, efetuando-se as substituições $2x = y$ e $4x = t$ nos limites acima e utilizando-se o limite fundamental, segue que

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen2x}{x} = 2\lim_{y\to 0} \frac{seny}{y} = 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{sen4x}{x} = 4\lim_{t\to 0} \frac{sent}{t} = 4\,.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{6x - sen2x}{2x + 3sen4x} = \frac{[6-2]}{[2+3.4]} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}\,.$$

(57) Determine $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(1 + \dfrac{1}{tgx}\right)^{tgx}$.

Solução. Considere $tgx = y$ como $x \to \frac{\pi}{2}$ segue então que $y \to \infty$. Portanto,

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{tgx}\right)^{tgx} = \lim_{y\to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y} = e\,.$$

(58) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$.

Solução. Somando-se e subtraindo-se 1 ao numerador, tem-se

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}+1-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{-ax}-1-(e^{-bx}-1)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{-ax}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-bx}-1}{x}\,.\end{aligned}$$

Efetuando-se as mudanças de variáveis $-ax=t$ e $-bx=y$ em seguida, utilizando-se os limites fundamentais, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-ax}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{e^{-bx}-1}{x} &= -a\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}-(-b)\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}\\ &= -a\ln e+b\ln e=\ln e(b-a)=b-a\,.\end{aligned}$$

(59) Determine o valor do $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{tg^3\frac{x+1}{4}}{(x+1)^3}$.

Solução. Observe que a indeterminação é do tipo $\dfrac{0}{0}$. Para resolver esta indeterminação utiliza-se as seguintes manipulações algébricas:

$$\lim_{x\to -1}\frac{tg^3\left(\frac{x+1}{4}\right)}{(x+1)^3}=\lim_{x\to -1}\frac{\left[\frac{sen\left(\frac{x+1}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x+1}{4}\right)}\right]^3}{(x+1)^3}=\lim_{x\to -1}\frac{\left[sen\left(\frac{x+1}{4}\right)\right]^3}{(x+1)^3}\lim_{x\to -1}\left[\frac{1}{\cos\frac{x+1}{4}}\right]^3 .$$

É fácil ver que

$$\lim_{x\to -1}\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{x+1}{4}\right)}\right]^3=\left(\frac{1}{\cos 0}\right)^3=1\,.$$

Para encontrar a solução do outro limite, define-se $\dfrac{x+1}{4}=y$ então segue que,

$$\lim_{x\to -1}\frac{\left[sen\left(\frac{x+1}{4}\right)\right]^3}{(x+1)^3}=\lim_{y\to 0}\left(\frac{sen\,y}{4y}\right)^3=\frac{1}{4^3}\left(\lim_{y\to 0}\frac{sen\,y}{y}\right)^3=\frac{1}{64}\,.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to -1}\frac{tg^3\frac{x+1}{4}}{(x+1)^3}=\frac{1}{64}\,.$$

(60) Calcule o valor do $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

Solução. O resultado é dado por,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{-x}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}\,.$$

2.9 Exercícios Propostos

Calcule os limites:

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x^2+2x-5}}{4x-cos(\pi x)}$

2. $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt[3]{(x+3)^4-6x+5}$

3. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{3x^2-x+14}$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3-4x+\ln(2x^2-1)}{x^3-sen(\pi x)}$

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{3x^2-12}$

7. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+4x^2-x-4}{x^2-4x-5}$

8. $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sqrt{5+y}-\sqrt{5}}{y}$

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{9-x}-2}$

10. $\lim_{t \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{t} - 1}{\sqrt[4]{t} - 1}$

11. $\lim_{x \to -2} \dfrac{3x^3 + 10x^2 + 7x - 2}{x^5 + 2x^4 + x^2 - 5x + 14}$

12. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8 + h} - 2}{h}$

13. $\lim_{t \to 1} \dfrac{3t^3 - t - 2}{t^4 - 1}$

14. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{16 - x} - 4}{x}$

15. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{4x + 12} - 2}{x - 1}$

16. $\lim_{q \to 1} \dfrac{\sqrt{q} - 1}{\sqrt[3]{q} - 1}$

17. $\lim_{t \to -2} \dfrac{\sqrt{3t^2 - 8} + t}{2t + 4}$

18. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 8x - 5}{4 - x^3}$

19. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{4x^2 - 3} + 5x}{1 - 2x}$

20. $\lim_{x \to \pi^-} \dfrac{1 - cosx}{sen2x}$

21. Calcule os limites especiais

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x - \operatorname{sen} 5x}{x + \operatorname{sen} 3x}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a^2+2x} - a}{x}$ **(d)** $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x-2}$

22. Considere a expressão

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{x} = A\,.$$

Calcule o valor do limite

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+A}{x}\right)^x\,.$$

Capítulo 3

Funções Contínuas

3.1 Introdução

No capítulo sobre limites, observou-se que a existência do limite de uma função f quando x tende para a independe da função f estar ou não definida no ponto a. Ao mesmo tempo, que f pode estar definida em $x = a$, o limite pode existir, mas, este limite pode ser diferente de $f(a)$. A idéia de continuidade de uma função f num ponto a passa pelo fato de que o limite de f precisa existir quando x tende a a e que o valor do limite seja igual a $f(a)$.

3.2 Definição

Diz-se que uma função f é contínua no ponto a se as seguintes condições forem satisfeitas:

(a) f seja definida no ponto a;

(b) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ exista;

(c) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

3.3 Propriedades

Se as funções f e g são contínuas em um ponto a, então

(1) $f + g$ é contínua em a.

(2) $f - g$ é contínua em a.

(3) $f.g$ é contínua em a.

(4) $\dfrac{f}{g}$ é contínua em a, desde que $g(a) \neq 0$.

(5) Uma função polinomial é contínua para todo número real.

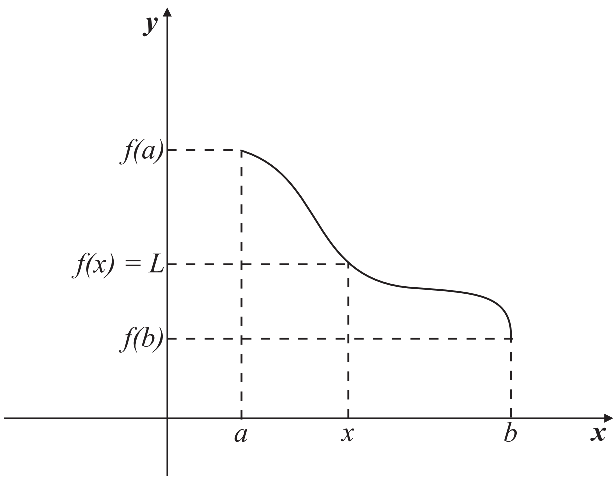
(6) Uma função racional é contínua em todos os pontos de seu domínio.

(7) Sejam f e g funções tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e g é contínua em b. Então,

$$\lim_{x \to a} (gof)(x) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = g(b).$$

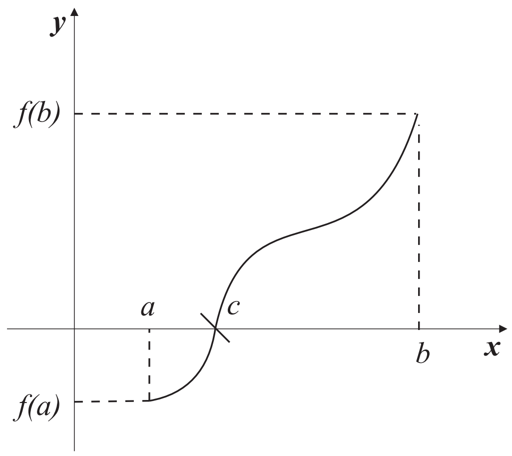
3.4 Teorema do Valor Intermediário

Se f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e L é um número tal que $f(a) \leq L \leq f(b)$ ou $f(b) \leq L \leq f(a)$ então existe pelo menos um $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = L$.



Observação 1. Esse teorema nos mostra por que as funções contínuas em um intervalo muitas vezes são consideradas como funções cujo gráfico pode ser traçado sem levantar o lápis do papel, isto é, não há interrupções no gráfico.

Observação 2. Se f é contínua em $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tem sinais opostos, então existe pelo menos um número c entre a e b tal que $f(c) = 0$. (f tem um zero, ou c é uma raiz para equação associada à função.)



Exemplo 1. Determine o valor de m para que a função seja contínua

$$f(x) = \begin{cases} x + 2m & se \quad x \leq -1 \\ m^2 & se \quad x > -1 \end{cases}$$

em $x = -1$.

Solução Com efeito, deve-se impor as três condições (definição) para que a função seja contínua em $x = -1$, assim sendo,

(a) $f(-1) = -1 + 2m$.

O limite de f tanto à direita, quanto a esquerda de $x = -1$ existem e são idênticos. De fato, para $x \leq -1$, isto é, x à esquerda de -1 a função é dada por $f(x) = x+2m$ e para $x > -1$, isto é, x à direita de -1 a função é dada por $f(x) = m^2$. Como $f(-1) = -1 + 2m$, segue,

(b) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to -1^+} m^2 = \lim\limits_{x \to -1^-} (x + 2m) \Rightarrow m^2 = -1 + 2m$.

(c) Resolvendo esta identidade para que o limite seja igual ao valor de $f(-1)$, tem-se

$$m^2 = -1 + 2m \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Desta forma, f será contínua em $x = -1$ desde que $m = 1$.

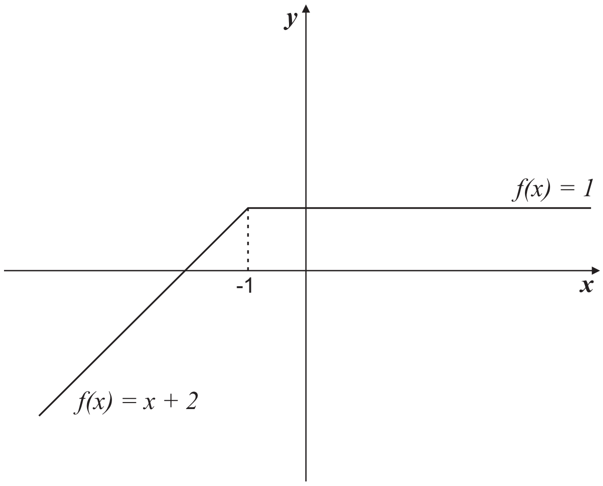


Gráfico de f(x) para m=1

Exemplo 2. Determine o valor de k para que a função abaixo seja contínua

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & se \quad x \neq 0 \\ k^3 - 7 & se \quad x = 0 \end{cases}$$

em $x = 0$.

Solução. Com efeito, aplicando-se a definição tem-se

(a) $f(0) = k^3 - 7$.

(b) Para que o limite à direita e à esquerda existam e sejam idênticos, colocamos,

$$\lim_{x \to 0^+} k^3 - 7 = \lim_{x \to 0^-} e^{2x} \Rightarrow k^3 - 7 = 1\,.$$

(c) Portanto, o valor de k para que o limite exista e seja igual a $f(0) = k^3 - 7$ fornece,

$$k^3 - 1 = 7 \Leftrightarrow k = 2\,.$$

Assim sendo, f será contínua em $x = 0$ sempre que $k = 2$.

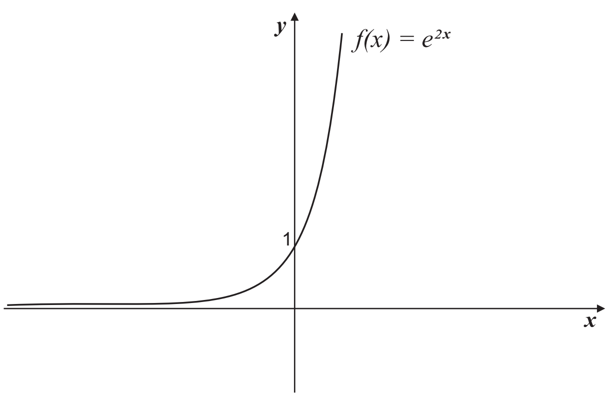


Gráfico de f(x) para k=2

Exemplo 3. Seja $f(x) = x^2 + x - 2$ então demonstre que f tem um zero no intervalo $[0, 2]$.

Prova Com efeito,

$$f(0) = -2 \qquad \text{e} \qquad f(2) = 4\,.$$

Como a função f calculada nos extremos deste intervalo tem sinais opostos, f é contínua neste intervalo (função polinomial) então pelo Teorema do Valor Intermediário existe um $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = 0$. De fato, $c = 1$ faz com que $f(1) = 0$.

Exemplo 4. Sejam $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$ e $f \circ g\,(x) = f^{-1}(x)$. Determine o valor de k para que

$$H(x) = \begin{cases} g(x) - f^{-1}(x) & \text{se} \quad x \leq -1 \\ 1 + k + xk^2 & \text{se} \quad x > -1 \end{cases}$$

seja contínua em $x = -1$.

Solução. A primeira parte da solução consiste em obter as expressões para as funções g e f^{-1}. Com efeito,

$$f(x) = y = \frac{x+1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y+1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = 2x - 1\,.$$

$$f(x) = \frac{x+1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{g(x)+1}{2} = f(g(x)) = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad g(x) = 4x - 3\,.$$

Assim sendo $g(x) - f^{-1}(x) = (4x - 3) - (2x - 1) = 2x - 2$, e, portanto

$$H(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{se} \quad x \leq -1 \\ 1 + k + xk^2 & \text{se} \quad x > -1\,. \end{cases}$$

Para que H seja contínua em $x = -1$ faz-se necessário que

(I) $H(-1)$ exista. De fato, $H(-1) = -4$;

(II) $\lim\limits_{x \to -1^-} 2x - 2 = \lim\limits_{x \to -1^+} 1 + k + kx^2 \quad \Rightarrow \quad -4 = 2k + 1 \quad \Rightarrow \quad k = -\dfrac{5}{2}$;

(III) Para que $\lim\limits_{x \to -1} H(x) = H(-1)$, a condição (II) permite concluir que $k = -\dfrac{5}{2}$.

Portanto, H será contínua em $x = -1$ sempre que $k = -\dfrac{5}{2}$.

Exemplo 5. Sejam $f(x) = e^{x-1}$ e $g(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Determine o valor de m para que

$$\alpha(x) = \begin{cases} 2f(x) - g(x) & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \frac{f^{-1}(x)}{m^2} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

seja contínua em $x = 1$.

Solução. Devemos encontrar primeiro as expressões para as funções g e f^{-1}. Com efeito,

$$g(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x-1+h} - e^{x-1}}{h} = e^{x-1}\left[\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}\right] = e^{x-1}.$$

Segue que, $g(x) = e^{x-1}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} y &= e^{x-1} \Rightarrow x = e^{y-1} \Rightarrow \ln x = \ln\left(e^{y-1}\right) \\ &\Rightarrow \ln x = (y-1)\ln e \Rightarrow y = \ln x + 1. \end{aligned}$$

Portanto, $f^{-1}(x) = 1 + \ln x$.

Assim sendo, como

$$2f(x) - g(x) = 2e^{x-1} - e^{x-1} = e^{x-1} \qquad \text{e} \qquad \frac{f^{-1}(x)}{m^2} = \frac{1 + \ln x}{m^2},$$

segue que,

$$\alpha(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \frac{1+\ln x}{m^2} & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

Para que α seja contínua em $x = 1$ faz-se necessário que

(I) $\alpha(1)$ exista. De fato, $\alpha(1) = 1$;

(II) $\lim_{x\to 1^-} e^{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{1 + \ln x}{m^2} \Rightarrow 1 = \dfrac{1}{m^2} \Rightarrow m = \pm 1$.

(III) Para que $\lim_{x\to 1} \alpha(x) = \alpha(1)$, a condição (II) permite concluir que $m = \pm 1$.

Portanto, α será contínua em $x = 1$ sempre que $m = \pm 1$.

Exemplo 6. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = 2x^4 - 9x^2 + 4$. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a função f tem um zero em (0,1).

Solução. Com efeito, f é contínua no intervalo $[0,1]$ (pois, f é uma função definida por um polinômio), além disso, $f(0) = 4$ e $f(1) = -3$.

Portanto, como $-3 = f(1) < 0 < f(0) = 4$, então pelo Teorema do Valor Intermediário existe $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$, o que significa que f tem um zero, no número real c, dentro do intervalo $(0,1)$.

Exemplo 7. Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ onde $f(x) = x^2 - 2$. Mostre que existe um $c \in (0,2)$ tal que $c^2 = 2$.

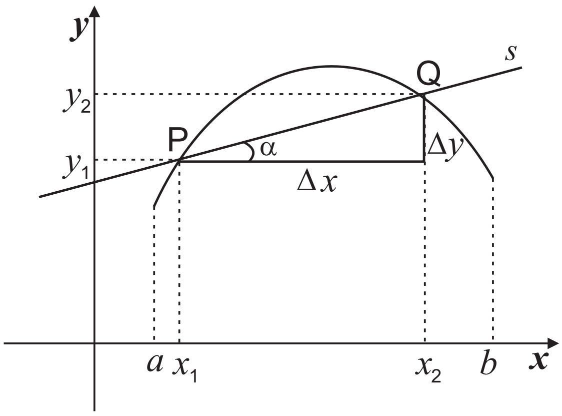
Solução. A, f é contínua no intervalo $[0,2]$ (pois, f é uma função definida por um polínômio quadrático), além disso, $f(0) = -2$ e $f(2) = 2$. Portanto, como $-2 = f(0) < 0 < f(2) = 2$, então pelo Teorema do Valor Intermediário existe $c \in (0,2)$ tal que $f(c) = 0$, o que significa que $f(c) = c^2 - 2 = 0$, ou seja, $c^2 = 2$.

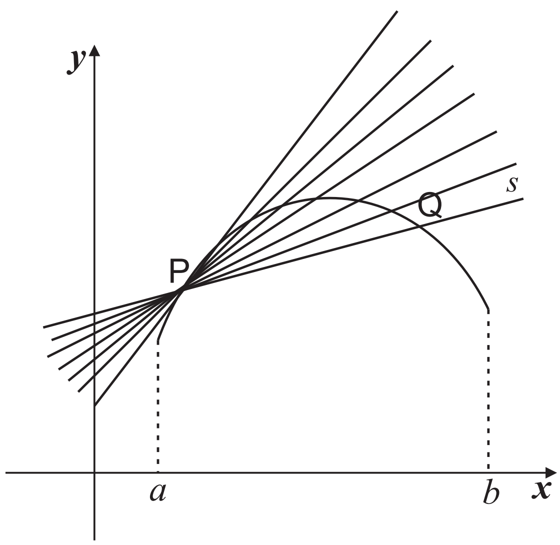
Capítulo 4

Derivadas e Integrais

4.1 Derivada

4.1.1 Interpretação Geométrica





4.1.2 Derivada de uma Função num ponto

A derivada de uma função f no ponto a, denotada por $f'(a)$ (lê-se f linha no ponto a), é definida pelo limite

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x},$$

quando este limite existe.

4.1.3 Derivada de uma Função

A derivada de uma função $y = f(x)$ é a função denotada por $f'(x)$ tal que seu valor em qualquer ponto $x \in D_f$ é dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

caso este limite exista. Diz-se que uma função f é derivável quando existe a derivada em todos os pontos de seu domínio.

Notações mais freqüentes para a Derivada da Função $\mathbf{y = f(x)}$

$$y' = f'(x); \qquad \frac{dy}{dx}; \qquad D_x f(x)\,, \quad D_x y \quad \text{ou} \quad \dot{y}(x) = \dot{f}(x).$$

O leitor interessado poderá consultar o capítulo de exercícios resolvidos sobre derivadas colocado no final deste livro afim de identificar com mais profundidade o uso desta definição, as principais propriedades e algumas regras básicas.

4.1.4 Derivada da Função Inversa

Seja $y = f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto $]a, b[$. Suponha-se que f admita uma função inversa $x = g(y)$ contínua. Se $f'(x)$ existe e é diferente de zero para qualquer $x \in]a, b[$, então $g = f^{-1}$ é derivável e vale

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}. \tag{4.1}$$

Para uma demonstação deste fato o leitor poderá consultar Diva Flemming e Mirian Buss[1]

[1]Cálculo A, Funções Limite Derivação e Integração. Makron Books.1992.

4.1.5 Regras Elementares: Derivadas Imediatas

Exemplo 1. Considere $f(x) = x^2$. Demonstre que a derivada desta função é dada por $f'(x) = 2x$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x\Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x. \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = 2x$.

Exemplo 2. Usando-se raciocínio semelhante é fácil provar por indução Matemática que

$$f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = nax^{n-1}.$$

Com efeito,

(I) A identidade é verdadeira para $n = 1$, pois $f(x) = ax$ tem como derivada $f'(x) = a$.

(II) Suponha que a identidade seja verdadeira para n, isto é, se $f(x) = ax^n$ então $f'(x) = nax^{n-1}$. Então devemos mostrar que ela é também verdadeira para $n+1$. Ou seja, vamos encontrar a derivada de $f(x) = ax^{n+1}$ assumindo como verdadeira a condição (II).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^{n+1} - ax^{n+1}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^n(x+\Delta x) - ax^n x}{\Delta x} \\ &= ax \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^n \Delta x}{\Delta x} \\ &= ax.nx^{n-1} + ax^n = anx^n + ax^n = a(n+1)x^n. \end{aligned}$$

Portanto, se $f(x) = ax^n$ então $f'(x) = nax^{n-1}$. Este resultado pode ser generalizado para n racional.

Observação. Um outro resultado que vem imediatamente do exemplo é o fato de que $f(x) = a$ (função constante) então $f'(x) = 0$.

Exemplos 3 Encontre as derivadas das funções abaixo:

a) $f(x) = 5\sqrt[2]{x^3}$.

Solução. Observe que $f(x) = 5\sqrt[2]{x^3} = 5x^{\frac{3}{2}}$. Aplicando-se a regra acima, obtém-se

$$f'(x) = 5.\frac{3}{2}x^{(\frac{3}{2}-1)} = \frac{15}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

b) $f(x) = 7$

Solução. Observe que $f'(x) = 0$. A derivada desta função é obtida substituindo $n = 0$ na expressão do Exemplo 2. O resultado é dado por

$$f(x) = 7 = 7x^0\,, \quad \text{logo,} \quad f'(x) = 7.0x^{-1} = 0.$$

A partir deste exemplo, pode-se afirmar que a derivada de uma função constante é nula.

Derivada da Soma de Funções.

Sejam f e g funções deriváveis com $h(x) = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$. Então h é derivável e vale $h'(x) = (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Prova. Com efeito, como f e g são deriváveis então

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \quad \text{existem}\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f'(x) + g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f+g)(x+\Delta x) - (f+g)(x)}{\Delta x} = (f+g)'(x) = h'(x)\,. \end{aligned}$$

Generalizando, este resultado é verdadeiro para um número finito de funções.

Exemplo 4 Considere $f(x) = x^3 + 3x^2$ então calcule $f'(x)$

Solução. Aplicando-se as regras enunciadas, obtém-se

$$f'(x) = 3x^2 + 3.2x = 3x^2 + 6x\,.$$

Derivada do Produto de Funções

Sejam f e g funções deriváveis com $h(x) = (f.g)(x) = f(x).g(x)$. Então h é derivável e vale $h'(x) = (f.g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Prova. Como f e g são deriváveis então,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \quad \text{existem}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(f.g)'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)g(x) + f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\left[g(x+\Delta x) - g(x)\right]}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x)[f(x+\Delta x) - f(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

Portanto, $h(x) = f(x).g(x)$ então $h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$.

Exemplo. Considere $f(x) = x^2.2x^5$ então encontre $f'(x)$.

Solução. Aplicando-se as regras anteriores, obtém-se

$$f'(x) = 2x.2x^5 + x^2.5.2x^4 = 4x^6 + 10x^6 = 14x^6.$$

Derivada do Quociente de Funções

Sejam f e g funções deriváveis com $h(x) = \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Então h é derivável e vale $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Prova. Como f e g são deriváveis então,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{e} \quad g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \quad \text{existem}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
h'(x) = \left[\frac{f}{g}\right]'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x) - f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} \\
&= g(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} - f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ então $h'(x) = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$.

Exemplo. Considere $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x}{x^2}$ então calcule $f'(x)$.

Solução. Aplicando-se a regra do quociente acima, tem-se

$$f'(x) = \frac{(3x^2+5).x^2 - (x^3+5x).2x}{(x^2)^2} = \frac{3x^4 + 5x^2 - 2x^4 - 10x^2}{x^4} = \frac{x^4 - 5x^2}{x^4} = \frac{x^2-5}{x^2}.$$

Regra da Cadeia

$$\text{Se} \quad y = f(g(x)) \quad \text{então} \quad y' = f'(g(x)).g'(x).$$

Exemplo. Considere $f(x) = (x^2+1)^3$, calcule $f'(x)$.

Solução. Aplicando-se a regra da cadeia, obtém-se

$$f'(x) = 3.(x^2+1)^2.(x^2+1)' = 3(x^2+1)^2.(2x) = 6x(x^2+1)^2.$$

Derivadas Laterais

Seja f definida num intervalo I com $a \in I$. Diz-se que f é derivável à direita de a sempre que

$$f'_+(a) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

exista. Similarmente, f é derivável à esquerda de $a \in I$ sempre que

$$f'_-(a) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

exista.

Resultado Importante.

Diz-se que f é derivável em a quando existem e são iguais os limites laterais (à esquerda e à direita) de a. Ou seja, f é derivável em $x = a$ se, e, somente se, $f'_+(a) = f'_-(a)$.

4.2 Integral

4.2.1 Primitiva de uma Função

Seja f uma função definida num intervalo I diz-se que F é uma primitiva para a função f dentro do intervalo I quando $F'(x) = f(x)$ para todos os valores de x dentro de I.

4.2.2 Integral Indefinida

Chama-se integral indefinida de uma função f a função $F(x) + c$. Ou seja ,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c \quad \Longleftrightarrow F'(x) = f(x).$$

A existência de uma primitiva F para uma função f definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ estabelece que f é integrável.

Propriedades

Integral da Soma de Funções e Produto de uma função por escalar

Sejam $h(x) = f(x) + g(x)$ e $k \in \mathbb{R}$. Se f e g são integráveis, onde $F(x) + C_1$ e $G(x) + C_2$ são as primitivas de f e g, respectivamente, então

$$\int h(x)dx = \int (f(x) + g(x))dx = (F(x) + G(x)) + C_1 + C_2 = (F(x) + G(x)) + C\,,$$

onde, $C = C_1 + C_2$. Portanto, $F(x) + G(x) + C$ é uma primitiva para $h(x) = f(x) + g(x)$. Assim sendo, vale

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) + C &= \int h(x)dx = \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \\ &= F(x) + C_1 + G(x) + C_2 = (F(x) + G(x)) + (C_1 + C_2). \end{aligned}$$

Isto é,

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Por outro lado, é fácil observar que $F(x) + C_1$ é uma primitiva para $f(x)$, assim como $kF(x) + kC_1$ é uma primitiva para $kf(x)$. Segue então

$$\int kf(x)dx = kF(x) + kC_1 = k(F(x) + C_1) = k\left(\int f(x)dx\right) = k\int f(x)dx.$$

Portanto, h e kf são integráveis. Este resultado é verdadeiro para um número finito de funções.

Exemplo. Seja a função constante $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, então

$$\int f(x)dx = \int kdx = k\int dx = kx + C.$$

Portanto, a primitiva da função constante $f(x) = k$ é a função $F(x) = kx + C$.

4.2.3 Regras Elementares: Integrais Imediatas

Função Polinomial.

Seja $f(x) = x^n$, com $n \neq -1$, então

$$\int f(x)dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c.$$

Ou seja, a função $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$ é a primitiva de $f(x) = x^n$, pois, neste caso, $F'(x) = f(x)$.

Exemplo. Considere $f(x) = x^2$ então encontre a integral de f.

Solução.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c.$$

O leitor deve observar que $F'(x) = x^2$. O que significa que $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + c$ é a primitiva de $f(x) = x^2$.

Integral Especial.

Uma integral especial que o leitor terá mais informações nas próximas seções é a seguinte:

$$\text{se} \quad f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{então} \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln x + c.$$

A primitiva da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é a função $F(x) = \ln x + c$.

4.3 Derivadas e Integrais de Funções Elementares

Exemplo. Encontre a função inversa da função bijetora

$$f(x) = \frac{x}{x+2}.$$

Depois, determine a derivada e a integral indefinida das funções f e f^{-1}.

Solução. Escreve-se inicialmente a função da seguinte forma

$$y = \frac{x}{x+2}$$

agora trocam-se as variáveis x por y e vice versa, isto é,

$$x = \frac{y}{y+2}\,.$$

Finalmente, isola-se y, o resultado é

$$x(y+2) = y \quad \Rightarrow \quad xy + 2x = y \quad \Rightarrow \quad xy - y = -2x.$$

Portanto,

$$y = \frac{(2x)}{(1-x)}\,.$$

Logo, se $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ então $f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{1-x}$.

Para obter a derivada das funções f e f^{-1} utiliza-se a regra do quociente. O resultado é obtido da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} \implies f'(x) = \frac{1.(x+2) - x.1}{(x+2)^2} \implies f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2}\,.$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow [f^{-1}]'(x) = \frac{2.(1-x) - 2x.(-1)}{(1-x)^2} \Rightarrow [f^{-1}]'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}\,.$$

As integrais indefinidas de f e f^{-1}, são dadas por

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= \int \frac{x}{x+2}\,dx = \int \frac{(x+2-2)}{x+2}dx = \int \frac{x+2}{x+2}dx - 2\int \frac{dx}{x+2} \\
&= \int dx - 2\int \frac{dx}{x+2} = x - 2\ln|x+2| + c\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int f^{-1}(x)dx &= \int \frac{2x}{1-x}dx = -2\int \frac{x}{x-1}dx = -2\int \frac{(x-1+1)}{x-1}dx \\
&= -2\left[\int \frac{x-1}{x-1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx\right] \\
&= -2\int dx - 2\int \frac{dx}{x-1} = -2x - 2\ln|x-1| + c.
\end{aligned}$$

4.3.1 Função Exponencial

Seja a um número real, $a > 0$ e $a \neq 1$. Chama-se de função exponencial de base a, a função que a cada número real x associa o número real a^x, ou seja,

$$\begin{aligned}
f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
&\quad x \to f(x) = a^x.
\end{aligned}$$

O domínio da função exponencial é $\mathbb{R}$ e a imagem $\mathbb{R}_+^*$.

4.3.2 Derivada da Função Exponencial

Seja $f(x) = a^x$ com $a \neq 1$ e $a > 0$, então

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

ou seja, se $f(x) = a^x$ então $f'(x) = a^x \ln a$.

Em particular, se $f(x) = e^x$ então $f'(x) = e^x \ln e = e^x$.

4.3.3 Integral Indefinida da Função Exponencial

$$\int f(x)dx = \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c.$$

Ou seja, $F(x) = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$ é uma primitiva para $f(x) = a^x$. Em particular,

$$\int e^x dx = e^x + c\,.$$

4.3.4 Função Logarítmica

Chama-se de função logarítmica de base a, com $a > 0$ e $a \neq 1$ a função que associa a cada $x \in \mathbb{R}_+^*$ o número real $\log_a x$, isto é,

$$\begin{aligned} f \;:\; & \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = \log_a x. \end{aligned}$$

O domínio da função logarítmica é $\mathbb{R}_+^*$ e a imagem $\mathbb{R}$.

4.3.5 Derivada da Função Logarítmica

Se $f(x) = \log_a x$ então a sua derivada é dada por $f'(x) = \dfrac{\log_a e}{x}$
Em particular, se $f(x) = \ln x$ então $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

4.3.6 Integral Indefinida da Função Logarítmica

$$\int log_a x dx = x \log_a x - x \log_a e + c\,.$$

Ou seja, $F(x) = x - x log_a e + c$ é uma primitiva para $f(x) = log_a x$. No caso em que a base do logarítmo é $a = e$, tem-se

$$\int \ln x dx = x \ln|x| - x + c\,.$$

4.4 Derivadas e Integrais de Funções Trigonométricas

4.4.1 Função seno

A função seno é definida como sendo a função f que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $y = \operatorname{sen} x$, isto é,

$$\begin{aligned} f \;:\; & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

O domínio da função seno é $\mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo real $[-1, 1]$.

4.4.2 Função Arco Seno

Para obter a função inversa da função seno considera-se a função

$$\begin{aligned} f: \quad [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] &\longrightarrow [-1,1] \\ f(x) &= \operatorname{sen} x\,. \end{aligned}$$

Então a inversa de $f(x) = \operatorname{sen} x$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad [-1,1] &\longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x &\longrightarrow f^{-1}(x) = \operatorname{arc\ sen} x\,. \end{aligned}$$

4.4.3 Derivada da Função Seno

Para encontrar a derivada da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ usa-se a conhecida identidade trigonométrica

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen}\,(\frac{p-q}{2}) \cos(\frac{p+q}{2}).$$

De fato, aplicando-se a definição de derivada, tem-se

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\,(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\operatorname{sen}(\frac{x+\Delta x - x}{2}) \cos(\frac{x + \Delta x + x}{2})}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}. \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x, \end{aligned}$$

pois,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\operatorname{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Portanto, se $f(x) = \operatorname{sen} x$ então $f'(x) = \cos x$.

4.4.4 Derivada da Função Arco seno

A derivada da função $y = \operatorname{arc\ sen} x$ é estabelecido mediante a utilização do teorema sobre a derivada da função inversa (4.1). Observe que,

$$f(x) = y = \operatorname{arc\ sen} x \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \operatorname{sen} y$$

logo,

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{(\text{sen}y)'} \\
&= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\text{se} \quad f(x) = \text{arc sen}x \quad \text{então} \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

4.4.5 Integral da Função Seno

Neste caso, se $y = \text{sen}\,x$ então

$$\int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + c, \quad \text{pois} \quad (-\cos x + c)' = \text{sen}x\,.$$

Uma primitiva de $f(x) = \text{sen}x$ é a função $F(x) = -\cos x + c$.

4.4.6 Integral da Função Arco Seno

Se $y = \text{arc sen}x$ então

$$\int \text{arc sen}\,x\,dx = x\,\text{arc sen}\,x + \sqrt{1-x^2} + c\,.$$

Pois, $F(x) = x\text{arc sen}\,x + \sqrt{1-x^2} + c$ é uma primitiva de $f(x) = \text{arc sen}\,x$. Além disso, é imediato que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen}\,x + c\,.$$

O leitor encontrará alguns exemplos sobre esta função no capítulo de exercícios resolvidos.

4.4.7 Função Cosseno

A função cosseno é definida como sendo a função f que a cada $x \in \mathbb{R}$ associa o número real $f(x) = \cos x$, isto é,

$$
\begin{aligned}
f \; : \; & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
& x \to f(x) = \cos x.
\end{aligned}
$$

O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$ e a imagem é o intervalo $[-1,1]$.

4.4.8 Função Arco Cosseno

A inversa da função cosseno pode ser obtida da seguinte forma: seja a função bijetora

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad [0,\pi] \to [-1,1] \\ f(x) \quad &= \cos\, x \end{aligned}$$

então a inversa de $f(x) = \cos\, x$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad &: \quad [-1,1] \to [0,\pi] \\ & \quad x \to f^{-1}(x) = \text{arc}\,\cos x. \end{aligned}$$

4.4.9 Derivada da Função Cosseno

Considere $f(x) = \cos x$ e a conhecida identidade trigonométrica

$$\cos p - \cos q = -2\,\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right).\,\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

A derivada da função cosseno pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f'(x) \quad &= \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &= \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\,\text{sen}\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right).\text{sen}\left(\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}\right)}{\Delta x} \\ &= \quad \lim_{\Delta x \to 0}\left(-2\,\text{sen}\,\frac{2x+\Delta x}{2}\right).\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\text{sen}(\Delta x/2)}{2.\frac{\Delta x}{2}} = -2\,.\,\text{sen}x.\frac{1}{2}.1 = -\text{sen}x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{se} \quad f(x) = \cos x \quad \text{então} \quad f'(x) = -\text{sen}x.$$

4.4.10 Derivada da Função Arco Cosseno

A derivada da função $f(x) = \text{arc}\,\cos x$ é estabelecido mediante a utilização do teorema sobre a derivada da função inversa (4.1). Observe que,

$$f(x) \quad = \quad y = \text{arc}\,\cos x \Rightarrow x = f^{-1}(y) = \cos y$$

logo,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{(f^{-1}(y))'} = \frac{1}{(\cos y)'} \\ &= \frac{-1}{\text{sen} y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{se} \quad f(x) = \text{arc } \cos x \quad \text{então} \quad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

4.4.11 Integral da Função Cosseno

Neste caso, se $f(x) = \cos x$ então

$$\int \cos\, x\, dx \;=\; \text{sen} x + c\,.$$

Pois, $F(x) = \text{sen}\, x + c$ é uma primitiva para a função $f(x) = \cos x$.

4.4.12 Integral da Função Arco Cosseno

Se $f(x) = \text{arc } \cos x$ então

$$\int \text{arc } \cos\, x\, dx \;=\; x\, \text{arc } \cos\, x \;-\; \sqrt{1-x^2} \;+\; c\,.$$

Além disso, é fácil observar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{-arc } \cos x \;+\; c\,.$$

O leitor encontrará alguns exercícios resolvidos sobre esta função nos capítulos sobre derivadas e integrais.

4.4.13 Funções Tangente

A função tangente

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen} x}{\cos x}$$

é definida para todos os números $x \in \mathbb{R}$ tais que $\cos x \neq 0$. Ou seja, o domínio da função tangente é dada por $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}$.

4.4.14 Função Arco Tangente

Considere a função bijetora

$$\begin{aligned} f: \ \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[\ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) \quad &= \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

A inversa de $f(x) = \operatorname{tg} x$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1}: \ \mathbb{R} \ &\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x \ &\to f^{-1}(x) = \operatorname{arc\ tg} x. \end{aligned}$$

4.4.15 Derivada da Função Tangente

A derivada da função tangente é obtida utilizando-se a regra do quociente para derivadas. O resultado é dado por

$$f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{\cos x . \cos x \ - \ \operatorname{sen} x .(\text{-}\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Portanto,

$$\text{se} \quad f(x) = \operatorname{tg} x \qquad \text{então} \qquad f'(x) = \sec^2 x.$$

4.4.16 Derivada da Função Arco Tangente

A derivada desta função é obtida utilizando-se o resultado (4.1), isto é,

$$\text{se} \qquad f(x) = \operatorname{arc\ tg} x \qquad \text{então} \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

4.4.17 Integral da Função Tangente

$$\int \operatorname{tg} x \, dx \ = \ \ln|\sec x| \ + \ c.$$

Este resultado será melhor detalhado nos exercícios resolvidos, a seguir.

4.4.18 Integral da Função Arco Tangente

$$\int \text{arc tg}\, x\, dx \;=\; x \,\text{arc tg}\, x \;-\; \frac{1}{2} \ln{(1+x^2)} \;+\; c\,.$$

Ou seja, $F(x) = x\,\text{arc tg}\, x \;-\; \dfrac{1}{2} \ln{(1+x^2)} \;+\; c$ é uma primitiva para $f(x) = \text{arc tg}\, x\,.$
É imediato que

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \text{arc tg}\, x \;+\; c\,.$$

4.4.19 Função Cotangente

A função cotangente é definida por

$$\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$$

para todos os números $x \in \mathbb{R}$ tais que $\text{sen}\, x \neq 0$. Ou seja, o domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \quad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

4.4.20 Função Arco Cotangente

Considere a função bijetora

$$\begin{aligned} f:\ \ ]0\,,\,\pi[\quad &\longrightarrow [-1,1] \\ f(x) \quad &= \text{cotg}\, x. \end{aligned}$$

A inversa de $f(x)$ é a função definida por

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ \ [-1,1] \quad &\longrightarrow]0\,,\,\pi[\\ x \qquad &\longrightarrow\ f^{-1}(x) = \text{arc cotg}\, x. \end{aligned}$$

4.4.21 Derivada da Função Cotangente

O uso da regra do quociente para derivadas permite a seguinte conclusão:

$$\text{se} \qquad f(x) = \text{cotg}\, x \quad \text{então} \quad f'(x) = -\text{cosec}^2\, x\,.$$

4.4.22 Derivada da Função Arco Cotangente

A utilização da identidade (4.1) permite escrever que

$$\text{se} \qquad f(x) = \text{arc cotg}\, x \quad \text{então} \quad f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}\,.$$

4.4.23 Integral da Função Cotangente

$$\int \operatorname{cotg} x \, dx \;=\; \ln|\operatorname{sen} x| \;+\; c\,.$$

4.4.24 Integral da Função Arco Cotangente

$$\int \operatorname{arc\,cotg} x \, dx \;=\; x \operatorname{arc\,cotg} x \;+\; \frac{1}{2}\ln(1+2x^2) + c\,.$$

É imediato também que

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = -\operatorname{arc\,cotg} x \;+\; c.$$

4.4.25 Função Secante

Define-se a função secante como sendo

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

onde o domínio desta função é o mesmo da tangente definido acima.

4.4.26 Função Arco Secante

$$\begin{array}{lll} f^{-1}: &]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[& \longrightarrow]0,\pi[- \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \\ & x & \rightarrow\; f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sec} x. \end{array}$$

4.4.27 Derivada da Função Secante

O uso da regra do quociente para derivadas resulta no seguinte:

$$\text{se} \qquad f(x) = \sec x \qquad \text{então} \qquad f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x.$$

4.4.28 Derivada da Função Arco Secante

$$\text{Se} \qquad f(x) = \operatorname{arc\,sec} x \qquad \text{então} \qquad f'(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad |x| \,>\, 1.$$

4.4.29 Integral da Função Secante

$$\int \sec x \, dx \;=\; \ln|\sec x \;+\; \operatorname{tg} x| \;+\; c.$$

Observe

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \text{arc sec}\, x \;+\; c\,.$$

4.4.30 Integral da Função Arco Secante

É deixada como exercício a obtenção da integral da função arco secante.

4.4.31 Função Co-secante

Define-se função Co-secante por

$$\begin{array}{llll} f: & \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[\,\cup\,\left]\pi,\frac{3\pi}{2}\right[& \longrightarrow &]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\\ & x & \longrightarrow & f(x)=\text{cosec}\, x\,. \end{array}$$

4.4.32 Função Arco Co-secante

A inversa da função arco co-secante é definida por

$$\begin{array}{llll} f^{-1}: &]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[& \longrightarrow & \left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[\,\cup\,\left]\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right[\\ & x & \longrightarrow & f^{-1}(x)=\text{arc cosec}\, x \end{array}$$

4.4.33 Derivada da Função Co-secante

$$\text{Se} \qquad f(x)=\text{cosec}\, x \qquad \text{então} \qquad f'(x)=-\text{cosec}\, x\, \text{cotg}\, x\,.$$

4.4.34 Derivada da Função Arco Co-secante

$$\text{Se} \qquad f(x)=\text{arc cosec}\, x \qquad \text{então} \qquad f'(x)=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \quad |x|\;>\;1\,.$$

4.4.35 Integral da Função Co-secante

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx \;=\; \ln|\mathrm{co}\ \sec x \;-\; \operatorname{cotg} x| \;+\; c\,.$$

É fácil concluir que

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = -\mathrm{arc}\ \operatorname{cosec} x \;+\; c\,.$$

4.4.36 Integral da Função Arco Co-secante

É deixada como exercício a obtenção da integral da função arco co-secante.

4.4.37 Tabela de Derivadas

Função	Derivada
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = ku$	$y' = ku'$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$
$y = u.v$	$y' = u'.v + u.v'$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y = \dfrac{u'.v - uv'}{v^2}$
$y = u^a \quad a \in \mathbb{Q}^*$	$y' = au^{a-1}.u'$
$y = a^u \quad a > 0 \; a \neq 1$	$y' = a^u \ln a \, u'$
$y = e^u$	$y' = e^u.u'$
$y = \log_a u \quad a > 0$	$y' = \frac{u'}{u} \log_a e$
$y = \ln u \quad a > 0$	$y' = \frac{u'}{u}$
$y = u^v \quad u > 0$	$y' = v.u^{v-1}.u' + v'u^v \ln u$
$y = sen\, u$	$y' = u'. \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' sen\, u$
$y = tg\, u$	$y' = u' sec^2\, u$
$y = cotg\, u$	$y' = -u' cosec^2\, u$
$y = sec\, u$	$y' = u' tg\, u \, . \, sec\, u$
$y = cosec\, u$	$y' = -u' cotg\, u \, . \, cosec\, u$
$y = arc\, sen\, u$	$y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = arc\ \cos\ u$	$y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = arc\, tg\, u$	$y' = \dfrac{u'}{1 + u^2}$
$y = arc\, cotg\, u$	$y' = -\dfrac{u'}{1 + u^2}$
$y = arc\, sec\, u$	$y' = \dfrac{u'}{\vert u\vert\sqrt{u^2 - 1}} \quad \vert u\vert > 1$
$y = arc\, cosec\, u$	$y' = -\dfrac{u'}{\vert u\vert\sqrt{u^2 - 1}} \quad \vert u\vert > 1$

onde u e v são duas funções de x e k uma constante.

4.4.38 Tabela de Integrais

Função	Integral
$y = k$	$\int kdx = kx + c$
$y = ku$	$k\int udu = k\frac{u^2}{2} + c$
$y = u^a$	$\displaystyle\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + c \quad a \neq -1$
$y = \dfrac{1}{u}$	$\displaystyle\int \frac{du}{u} = \ln u + c$
$y = a^u$	$\displaystyle\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
$y = e^u$	$\int e^u du = e^u + c$
$y = sen\, u$	$\int sen\, udu = -\cos u + c$
$y = \cos u$	$\int \cos udu = sen\, u\ +\ c$
$y = tg\, u$	$\int tg\, udu = -\ln\lvert\cos u\rvert\ +\ c$
$y = cotg\, u$	$\int cotg\, udu = \ln\lvert sen\, u\rvert\ +\ c$
$y = sec^2 u$	$\int sec^2 udu = tg\, u\ +\ c$
$y = cosec^2 u$	$\int cosec^2 udu = -cotg\, u\ +\ c$
$y = sec\, u\, tg\, u$	$\int sec\, u\, tg\, udu = sec\, u + c$
$y = cosec\, u\, cotg\, u$	$\int cosec\, u\, cotg\, udu = -cosec\, u + c$
$y = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$	$\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = arc\, sen\, u + c$
$y = \dfrac{1}{u^2+1}$	$\displaystyle\int \frac{du}{u^2+1} = arc\, tg\, u + c$
$y = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$	$\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = arc\, sec\, u + c$

Capítulo 5

Aplicações da Derivada

5.1 Aplicações Elementares

5.1.1 Taxa de Variação

Toda derivada pode ser interpretada como uma taxa de variação. Dada uma função $y = f(x)$, quando a variável independente varia de x até $x + \triangle x$, a correspondente variação de y será $\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$.

O quociente $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$ representa a taxa de variação média de y em relação a x.

A derivada $f'(x) = \lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$ é a taxa de variação instantânea ou simplesmente a taxa de variação de y em relação a x.

5.1.2 Velocidade e Aceleração

Considere um corpo se movendo em linha reta e que $S = S(t)$ seja o espaço percorrido pelo móvel até o instante t. Então, no intervalo de tempo entre t e $t + \triangle t$, o corpo sofre um deslocamento $\triangle S = S(t + \triangle t) - S(t)$.

Definimos a velocidade média neste intervalo como

$$V_m = \frac{S(t+\triangle t) - S(t)}{\triangle t};$$

e a velocidade instantânea do corpo no instante t como

$$V(t) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle S(t)}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{S(t+\triangle t) - S(t)}{\triangle t}.$$

O conceito de aceleração é estabelecido de forma análoga ao da velocidade. Neste caso, define-se a aceleração média por;

$$a_m = \frac{\triangle V}{\triangle t} = \frac{V\left(t + \triangle t\right) - V\left(t\right)}{\triangle t};$$

e aceleração instantânea por;

$$a\left(t\right) = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{V\left(t = \triangle t\right) - V\left(t\right)}{\triangle t}.$$

Exemplo. No instante $t = 0$ um corpo inicia um movimento em linha reta segundo a posição dada por $S\left(t\right) = 16t - t^2$.

Determine:

(a) A velocidade média no intervalo de tempo $[2, 4]$;

(b) A velocidade em $t = 2$ e aceleração em $t = 4$.

Solução.

(a)

$$V_m = \frac{S\left(4\right) - S\left(2\right)}{4 - 2} = \frac{\left(16 \cdot 4 - 16\right) - \left(16 \cdot 2 - 4\right)}{2} = \frac{48 - 28}{2} = 10 \text{ unid.}$$

(b)

$$V\left(t\right) = S'\left(t\right) = 16 - 2t \Rightarrow V\left(2\right) = 16 - 4 = 12\,\text{unid.}$$

$$a\left(t\right) = V'\left(t\right) = -2 \Rightarrow a\left(4\right) = -2\,\text{unid.}$$

5.2 Exercícios Resolvidos: Aplicações

(1) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x^2 - 2x + 1$ no ponto $(3, 4)$. Depois, determine a equação desta reta.

Solução. A inclinação da reta tangente à curva é dada por:

$$m\left(3\right) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f\left(3 + \triangle x\right) - f\left(3\right)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\left(3 + \triangle x\right)^2 - 2\left(3 + \triangle x\right) + 1 - 4}{\triangle x},$$

ou seja,

$$m(3) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{9 + 6\triangle x + \left(\triangle x\right)^2 - 6 - 2\triangle x - 3}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x\left(4 + \triangle x\right)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \left(4 + \triangle x\right) = 4.$$

A equação da reta neste ponto é dada por:

$$y - f(3) = m(3)(x-3) \Rightarrow y - 4 = 4(x-3) \Rightarrow y = 4x - 8.$$

(2) Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ no ponto cuja abscissa é 1.

Solução. O ponto da curva $y = 2x^2 + 3$ que tem abscissa igual a 1 é $P(1, f(1)) = (1, 5)$. A inclinação da reta é:

$$m(1) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(1 + \triangle x) - f(1)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{2(1+\triangle x)^2 + 3 - 5}{\triangle x},$$

ou seja,

$$m(1) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{2 + 4\triangle x + 2(\triangle x)^2 - 2}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x(4 + 2\triangle x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} (4 + 2\triangle x) = 4.$$

Daí, a equação da reta tangente à curva em $P(1, 5)$ é

$$y - f(1) = m(1)(x-1) \Longrightarrow y - 5 = 4(x-1) \Longrightarrow y = 4x + 1.$$

(3) Dada a função $f(x) = x^2 - 2x$, utilize a definição de derivada para obter $f'(x)$.

Solução. Por definição, a derivada de f em x é dada por:

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}.$$

Então,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x+\triangle x)^2 - 2(x + \triangle x) - (x^2 - 2x)}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{x^2 + 2x\triangle x + (\triangle x)^2 - 2x - 2\triangle x - x^2 + 2x}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x(2x + \triangle x - 2)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} 2x + \triangle x - 2 = 2x - 2. \end{aligned}$$

Logo, $f'(x) = 2x - 2$.

(4) Considere a função $f(x) = \text{sen } x$. Encontre a derivada $f'(x)$.

Solução. Com efeito,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\text{sen } (x+\triangle x) - \text{ sen } x}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(\text{sen } x)\cdot(\cos \triangle x) + (\text{sen } \triangle x)\cdot(\cos x) - (\text{sen } x)}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{-\ (\text{sen } x)\cdot(1-\cos \triangle x)}{\triangle x} + \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(\text{sen } \triangle x)\cdot(\cos x)}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{-(\text{ sen } x)\cdot(1-\cos^2 \triangle x)}{\triangle x\,(1+\cos \triangle x)} + \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\text{sen } \triangle x}{\triangle x} \cdot \cos x.
\end{aligned}$$

Note que na segunda parcela aparece um limite fundamental, como o valor deste limite é 1 e *cos x* é constante em relação ao limite, segue que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{-\ (\text{sen } x)\cdot(\text{ sen}^2 \triangle x)}{\triangle x\,(1+\cos \triangle x)} + \cos x \\
&= \cos x + \lim_{\triangle x \to 0} \frac{-\text{ sen } x}{1+\cos \triangle x} \cdot \ \text{sen } \triangle x \cdot \frac{\text{sen } \triangle x}{\triangle x}.
\end{aligned}$$

Aplicando-se o limite fundamental e efetuando-se algumas manipulações algébricas, o resultado final é dado por;

$$f'(x) = \cos x.$$

(5) Dada a função $f(x) = \begin{cases} -2x-4 & \text{se } x \leq -2 \\ 2x+4 & \text{se } x > -2 \end{cases}$, encontre $f'_{+}(-2)$ e $f'_{-}(-2)$.

Solução. Por definição,

$$\begin{aligned}
f'_{+}(-2) &= \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{f(-2+\triangle x) - f(-2)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{2(-2+\triangle x)+4-0}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{2\triangle x}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0^+} 2 = 2.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
f'_{-}(-2) &= \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{f(-2+\triangle x) - f(-2)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{-2(-2+\triangle x)-4-0}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{-2\triangle x}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0^-} -2 = -2.
\end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{f(-2+\triangle x) - f(-2)}{\triangle x} \neq \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{f(-2+\triangle x) - f(-2)}{\triangle x}$$

conclui-se que não existe o

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(-2+\triangle x) - f(-2)}{\triangle x}.$$

Portanto, a função não é derivável em $x = -2$.

(6) Considere a função $f(x) = |1 - x^2|$. Calcule as derivadas laterais em $x = 1$.

Solução. Deve-se reescrever a função em sentenças diferentes, já que ela é uma função modular. Ou seja, a função pode ser escrita da seguinte forma;

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \text{ se } |x| \leq 1\,; \\ x^2 - 1 \text{ se } |x| > 1\,. \end{cases}$$

Aplicando-se a definição de derivadas laterais, o resultado é dado por;

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{f(1+\triangle x) - f(1)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{1 - (1+\triangle x)^2 - 0}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{1 - 1 - 2\triangle x - (\triangle x)^2}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0^-} -2 - \triangle x = -2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{f(1+\triangle x) - f(1)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{(1+\triangle x)^2 - 1 - 0}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{1 + 2\triangle x + (\triangle x)^2 - 1}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0^+} 2 + \triangle x = 2. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{f(1+\triangle x) - f(1)}{\triangle x} \neq \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{f(1+\triangle x) - f(1)}{\triangle x},$$

segue que a função não é derivável em $x = 1$.

(7) Encontre as derivadas laterais em $x = 0$ da função $f(x) = (x-2) \cdot |x|$

Solução. Com o objetivo de facilitar o entendimento, a função pode ser escrita da seguinte forma;

$$f(x) = \begin{cases} (x-2) \cdot x & \text{se} \quad x \geq 0\,; \\ (x-2) \cdot (-x) & \text{se} \quad x < 0\,. \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se} \quad x \geq 0\,; \\ -x^2 + 2x & \text{se} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Aplicando-se a definição de derivada lateral, segue que

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{f(0+\triangle x) - f(0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0^-} \frac{-(\triangle x)^2 + 2\triangle x - 0}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle x \to 0^-} (-\triangle x + 2) = 2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{f(0+\triangle x) - f(0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0^+} \frac{(\triangle x)^2 - 2 \triangle x - 0}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle x \to 0^+} (\triangle x - 2) = -2. \end{aligned}$$

Como $f'_-(0) \neq f'_+(0)$, conclui-se que f não é derivável em $x = 0$.

(8) Seja $f(x) = 3x^4 - 8x + 5$. Encontre a derivada de f.

Solução. Aplicando-se diretamente as regras de derivação, obtém-se

$$f'(x) = 3 \cdot \left(x^4\right)' - 8 \cdot (x)' + (5)' = 3 \cdot 4x^3 - 8 \cdot 1 + 0 = 12x^3 - 8.$$

(9) Considere a função $f(x) = x^3 \cdot \cos x$. Ċalcule $f'(x)$.

Solução. Como f é produto de duas funções, deve-se aplicar a regra do produto. Com efeito,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^3\right)' \cdot \cos x + x^3 \cdot (\cos x)' = 3x^2 \cdot \cos x + x^3 \cdot (-\text{ sen } x) \\ &= 3x^2 \cos x - x^3 \text{ sen} x. \end{aligned}$$

(10) Dada a função $f(x) = \dfrac{2x^4 - 3}{x^2 - 5x + 3}$, encontre $f'(x)$.

Solução. A função f é o quociente de duas funções, logo deve-se aplicar a regra do quociente. Ou seja,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x^4 - 3)' \cdot (x^2 - 5x + 3) - (2x^4 - 3) \cdot (x^2 - 5x + 3)'}{(x^2 - 5x + 3)^2} \\ &= \frac{(8x^3 - 0) \cdot (x^2 - 5x + 3) - (2x^4 - 3) \cdot (2x - 5 + 0)}{(x^2 - 5x + 3)^2} \\ &= \frac{8x^5 - 40x^4 + 24x^3 - 4x^5 + 10x^4 + 6x - 15}{(x^2 - 5x + 3)^2} \\ &= \frac{4x^5 - 30x^4 + 24x^3 + 6x - 15}{(x^2 - 5x + 3)^2}. \end{aligned}$$

(11) Prove que se $f(x) = x^{-n}$ então $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

Solução. A função f pode ser escrita da seguinte maneira $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$. Aplicando-se a regra da derivada do quociente, tem-se

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1)' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1} \cdot x^{-2n} \\
&= -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$f'(x) = -nx^{-n-1}.$$

(12) Dada a função $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2} \cdot \left(3x^2 + 6x\right)$ encontre $f'(x)$.

Solução. Observe que a função f é o produto de duas funções, onde uma delas é o quociente entre duas outras funções. Desta maneira, deve-se aplicar as regras do produto e do quociente. De fato,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x+1}{x+2}\right)' \cdot \left(3x^2 + 6x\right) + \left(\frac{x+1}{x+2}\right) \cdot \left(3x^2 + 6x\right)' \\
&= \frac{(x+1)' \cdot (x+2) - (x+1) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} \cdot \left(3x^2 + 6x\right) + \left(\frac{x+1}{x+2}\right) \cdot (6x+6) \\
&= \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2} \cdot \left(3x^2 + 6x\right) + \frac{6(x+1)^2}{x+2} = \frac{3x^2 + 6x}{(x+2)^2} + \frac{6(x+1)^2}{x+2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{6x^2 + 15x + 6}{x+2} = 6x + 3\,.$$

(13) Ache a derivada da função $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

Solução. Observe que a função pode ser reescrita na forma $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{1/2}$. Aplicando-se a Regra da Cadeia, segue que

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1/2} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{1/2} \cdot \left[\frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-1)^{1/2}}{(x+1)^{1/2}} \cdot \left[\frac{-2}{(x-1)^2}\right] = \frac{-1}{(x-1)^{3/2} \cdot (x+1)^{1/2}}\,.
\end{aligned}$$

Logo,

$$y' = \frac{-1}{(x-1)^{3/2}\,(x+1)^{1/2}}\,.$$

(14) Calcule a derivada da função $g(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt[3]{t^3+1}}$.

Solução. Considere g escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{t^2}{\sqrt[3]{t^3+1}} = \frac{t^2}{(t^3+1)^{1/3}}, \qquad \text{segue então que} \\ g'(t) &= \frac{2t\cdot(t^3+1)^{1/3} - t^2\cdot 1/3\,(t^3+1)^{-2/3}\cdot(t^3+1)'}{\left[(t^3+1)^{1/3}\right]^2} \\ &= \frac{2t\,(t^3+1)^{1/3} - (1/3)\,t^2\,(t^3+1)^{-2/3}\cdot 3t^2}{(t^3+1)^{2/3}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$g'(t) = \frac{3t^4+2t}{\sqrt[3]{(t^2+1)^4}}.$$

(15) Calcule a derivada da função $g(x) = e^{x^2+x+1}$.

Solução. A função g é uma função composta, neste caso, utiliza-se a regra da cadeia, o resultado é dado por;

$$g'(x) = e^{\left(x^2+x+1\right)}\cdot\left(x^2+x+1\right)' = e^{\left(x^2+x+1\right)}\cdot(2x+1).$$

Portanto,

$$g'(x) = (2x+1)\cdot e^{x^2+x+1}.$$

(16) Obter a derivada da função $f(t) = (\text{sen } t + e^t)^2\cdot(\cos t + t^3)^3$.

Solução. Aplicando-se as Regras da Cadeia e do Produto, segue que;

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\left(\text{sen } t + e^t\right)\cdot\left(\text{sen } t + e^t\right)'\cdot\left(\cos t + t^3\right)^3 + \\ &+ \left(\text{sen } t + e^t\right)^2\cdot 3\left(\cos t + t^3\right)^2\cdot\left(\cos t + t^3\right)'. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2\left(\text{sen } t + e^t\right)\cdot\left(\cos t + e^t\right)\cdot\left(\cos t + t^3\right)^3 + \\ &+ 3\left(\text{sen } t + e^t\right)^2\cdot\left(\cos t + t^3\right)^2\cdot\left(-\text{ sen } t + 3t^2\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$f'(t) = \left(\text{sen } t + e^t\right)\cdot\left(\cos t + t^3\right)^2\cdot\left[2\left(\cos t + e^t\right)\cdot\left(\cos t + t^3\right) + 3\left(\text{sen } t + e^t\right)\cdot\left(3t^2 - \text{sen } t\right)\right].$$

(17) Encontre a derivada da função dada implicitamente por $x^2y^2 = x^2 + y^2$.

Solução. Observe que, para os casos em que tenha-se funções dadas implicitamente, também deve-se usar a Regra da Cadeia. Assim sendo,

$$\begin{aligned}
2x \cdot y^2 + x^2 \cdot 2y \cdot y' &= 2x + 2yy' \\
2x^2yy' - 2yy' &= 2x - 2xy^2 \\
y'\left(2x^2y - 2y\right) &= 2x - 2xy^2 .
\end{aligned}$$

Logo,

$$y' = \frac{2x - 2xy^2}{2x^2y - 2y} .$$

(18) Encontre a derivada da função dada implicitamente por

$$\cos\left(xy^2\right) - senx = 0 .$$

Solução. Da mesma forma, como no caso anterior, segue que,

$$\begin{aligned}
-\text{sen}\left(xy^2\right) \cdot \left(xy^2\right)' - \cos x &= 0 \\
-\ \text{sen}\left(xy^2\right) \cdot \left(y^2 + x2yy'\right) &= \cos x \\
-2xyy'\text{sen}\left(xy^2\right) &= \cos x + y^2\text{sen}\left(xy^2\right) .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$y' = -\frac{\cos x + y^2\text{sen}\,(xy^2)}{2xy\text{sen}\,(xy^2)} .$$

(19) Obter a derivada da função dada implicitamente por

$$\text{cotg}\,(x+y) + y\text{sen}x = 1 .$$

Solução. Aplicando-se as derivadas, obtém-se;

$$\begin{aligned}
-\text{cosec}^2\,(x+y) \cdot (1+y') + y'\text{sen }x + y\cos x &= 0 \\
y'\left[\text{sen }x - \ \text{cosec}^2\,(x+y)\right] &= \ \text{cosec}^2\,(x+y) - y\cos x .
\end{aligned}$$

Assim,

$$y' = \frac{\text{cosec}^2\,(x+y) - y\cos x}{\text{sen }x - \ \text{cosec}^2\,(x+y)} .$$

(20) Sabe-se que y' é a derivada da função y. Além disso, $y^{(2)} = y''$ é a derivada da função y'. O mesmo raciocínio é verdadeiro para a função $y^{(3)} = y'''$ ou seja, ela é a derivada da função $y^{(2)} = y''$. Com base nestas informações, encontre as derivadas sucessivas $y', y^{(2)}$, $y^{(3)}$ e $y^{(4)}$ das funções abaixo:

(a) $y = \operatorname{sen}(at+b)$, onde a e b são constantes;
(b) $y = e^{2x} + \dfrac{1}{2x}$.

Solução.
(a)

$$y' = \cos(at+b) \cdot (at+b)' = a\cos(at+b) \ ;$$

$$y^{(2)} = y'' = a \cdot \left[- \operatorname{sen}(at+b) \cdot (at+b)'\right] = a \cdot [- \operatorname{sen}(at+b) \cdot a] = -a^2 \operatorname{sen}(at+b) \ ;$$

$$y^{(3)} = y''' = -a^2 \cdot \cos(at+b) \cdot (at+b)' = -a^3 \cos(at+b) \ ;$$

$$y^{(4)} = -a^3 \cdot \left[- \operatorname{sen}(at+b) \cdot (at+b)'\right] = a^4 \operatorname{sen}(at+b) \ .$$

(b)

$$y' = e^{2x} \cdot (2x)' + \frac{1}{2} \cdot \left(-1x^{-2}\right) = 2e^{2x} - \frac{1}{2x^2} \ ;$$

$$y^{(2)} = 2e^{2x} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \left(-2x^{-3}\right) = 4e^{2x} + \frac{1}{x^3} \ ;$$

$$y^{(3)} = 4e^{2x} \cdot 2 + \left(-3x^{-4}\right) = 8e^{2x} - \frac{3}{x^4} \ ;$$

$$y^{(4)} = 8e^{2x} \cdot 2 - 3 \cdot \left(-4x^{-5}\right) = 16e^{2x} + \frac{12}{x^5} \ .$$

5.2.1 Diferencial

Sejam $y = f(x)$ uma função derivável e $\triangle x$ um acréscimo de x. Então define-se:

(a) A diferencial de x por $dx = \triangle x$. Similarmente, o acréscimo de y é definido por $\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$.
(b) A diferencial de y por $dy = f'(x)\,dx$, $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$.

(21) Seja $y = 2x^2 - 6x + 5$. Encontre os acréscimos $\triangle y$ e dy para o caso em que $x = 3$ e $\triangle x = 0,01$.

Solução. Por definição, $\triangle y$ é dado por;

$$\triangle y = f\left(x + \triangle x\right) - f\left(x\right) \,.$$

Substituindo-se os valores acima nesta identidade, tem-se;

$$\triangle y = f\left(x + \triangle x\right) - f\left(x\right) = f\left(3 + 0,01\right) - f\left(3\right) = f\left(3,01\right) - f\left(3\right) = 5,0602 - 5\,.$$

Logo, $\triangle y = 0,0602\,.$

Por outro lado, a definição de dy é:

$$dy = f'\left(x\right) \cdot \triangle x\,.$$

Logo, a substituição dos valores acima, nesta identidade, fornece;

$$dy = f'\left(x\right) \cdot \triangle x = \left(4x - 6\right) \cdot \triangle x = \left(4 \cdot 3 - 6\right) \cdot 0,01\,.$$

Portanto, $dy = 0,06$.

(22) Encontre o valor aproximado para $\sqrt[3]{67,5}$, utilizando-se diferencial.

Solução. Considere $y = f\left(x\right)$ a função definida por $f\left(x\right) = \sqrt[3]{x}$.

Então

$$y + \triangle y = f\left(x + \triangle x\right) = \sqrt[3]{x + \triangle x}$$

Neste caso, a derivada de f é dada por;

$$dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} dx\,. \tag{5.1}$$

Como 64 é o cubo perfeito mais próximo de $67,5$, faça $x = 64$ e $\triangle x = 3,5$. Assim sendo, segue que

$$x + \triangle x = 67,5 \quad \text{com} \quad dx = \triangle x = 3,5\,,$$

ou seja, substituindo-se estes valores na expressão acima, tem-se;

$$dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}} \cdot \left(3,5\right) = 0,07291\,.$$

Logo,

$$\sqrt[3]{67,5} = \sqrt[3]{64 + 3,5} = \sqrt[3]{x + \triangle x} = y + \triangle y\,.$$

Fazendo $\triangle y \simeq dy$, segue que;

$$\sqrt[3]{67,5} \simeq y + \triangle y = 4 + 0,07291 = 4,07291\,.$$

(23) Determine a velocidade e a aceleração no instante $t = 2s$ de um móvel que se desloca segundo a função horária $S(t) = t^3 - \ln(t) + 2t$ (t em segundos e S em metros).

Solução. Por definição,

$$v(t) = S'(t)$$

e

$$a(t) = v'(t) = S^{(2)}(t) = S''(t).$$

Logo,

$$v(t) = S'(t) = 3t^2 - \frac{1}{t} + 2$$

e

$$a(t) = 6t - \left(\frac{-1}{t^2}\right) = 6t + \frac{1}{t^2}.$$

No instante $t = 2$, tem-se:

$$v(2) = 3 \cdot 2^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{27}{2} m/s$$

e

$$a(2) = 6 \cdot 2 + \frac{1}{2^2} = \frac{49}{4} m/s^2.$$

(24) A lei de Boyle para a dilatação dos gases é $P \cdot V = C$, onde P é o número de Newtons por unidades quadradas de área , V é o número de unidades cúbicas do volume do gás e C é uma constante. Num certo instante , a pressão é de $3.000\ N/m^2$, o volume é, $5m^3$ e, o volume está aumentando à taxa de $3m^3/\min$. Encontre a taxa de variação da pressão nesse instante.

Solução. Como $P \cdot V = C$, tem-se que $P = \frac{C}{V}$. No instante em que $P = 3.000$ N/m^2 e $V = 5m^3$ a constante pode ser determinada, ou seja,

$$C = P \cdot V = 3.000 \cdot 5 = 15.000\, N/m.$$

A taxa de variação da pressão é dada por;

$$\begin{aligned} \frac{\triangle P}{\triangle V} &= -\frac{C}{V^2} \\ \triangle P &= -\frac{C}{V^2} \cdot \triangle V\,; \end{aligned}$$

onde $\triangle V = 3m^3/\min$. Portanto,

$$\triangle P = -\frac{15000 \cdot 3}{25} = -1.800\, Nm/\min\ .$$

(25) Um quadrado de lado l está se expandindo segundo a equação $l = 2 + t^2$, onde a variável t representa o tempo. Determine a taxa de variação desse quadrado no tempo $t = 2$.

Solução. A área do quadrado A é dada por $A = l^2$, onde $l = 2 + t^2$. A taxa de variação da área em relação ao tempo, num tempo t qualquer, é dada por $\dfrac{\triangle A}{\triangle t}$. Segue então,

$$\frac{\triangle A}{\triangle t} = \frac{\triangle A}{\triangle l} \cdot \frac{\triangle l}{\triangle t} = 2l \cdot 2t = 4 \cdot \left(2 + t^2\right) \cdot t = 4t^3 + 8t\,.$$

Portanto, no tempo $t = 2$, tem-se;

$$\frac{\triangle A}{\triangle t} = 4 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2 = 48\,.$$

Ou seja, o resultado será 48 unidades de área, por unidades de tempo.

(26) Um agricultor deseja construir um reservatório cilíndrico, fechado em cima, com capacidade de $6.280\ m^3$. Sabendo que o preço da chapa de aço é de $R\$50,00$ o metro quadrado e $\pi = 3,14$, determine suas dimensões de modo que o custo seja mínimo. Qual é o custo mínimo que o agricultor terá?

Solução. O custo do agricultor será dado por;

$$C(r) = C(r)\,(\textit{área das bases}) + C(r)\,(\textit{área lateral}) = \left(2\pi r^2 + 2rh\right) \cdot 50,00\,. \tag{5.2}$$

Como se quer determinar as dimensões r e h para que o custo seja mínimo, deve-se colocar h em função de r na equação anterior. Para isto, usa-se o volume (capacidade do cilindro), ou seja;

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 \cdot h \\ 6.280 &= \pi r^2 \cdot h \\ h &= \frac{6.280}{\pi r^2}\,. \end{aligned}$$

Daí, substituindo h em (5.2), tem-se;

$$C(r) = \left[2\pi r^2 + 2r \cdot \left(\frac{6.280}{\pi r^2}\right)\right] \cdot 50,00 = \left(2\pi r^2 + \frac{12.560}{\pi r}\right) \cdot 50,00$$

Para se ter custo mínimo, deve-se fazer $C'(r) = 0$.

Portanto,

$$C'(r) = \left[4\pi r - \frac{12.560}{\pi r^2}\right] \cdot 50,00 = 0\,;$$

ou seja,

$$C'(r) = 4\pi r - \frac{12.560}{\pi r^2} = 0 \quad \text{isto é} \quad 4\pi^2 r^3 - 12.560 = 0\,.$$

Segue então que;

$$r^3 = \frac{12.560}{4\pi^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{12.560}{4\pi^2}} \simeq 6,83$$

Logo,

$$h = \frac{6.280}{4\pi \cdot 6,83} \simeq 73,21$$

Portanto, as dimensões desejadas são $r = 6,83\ m$ e $h = 73,21\ m$. Assim sendo, o custo do agricultor será de:

$$C(6,83) = \left[2\pi (6,83)^2 + \frac{12.560}{\pi \cdot (6,83)}\right]\,.$$

Isto é, R\$ 31.929,02 (trinta e hum mil, novecentos e vinte e nove reais e dois centavos).

(27) Achar o valor aproximado para $\sqrt[3]{65,5}$.

Solução. Considere a função

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x}\,.$$

Então, tem-se;

$$f(x + \triangle x) = \sqrt[3]{x + \triangle x} \quad \text{e} \quad \triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)\ ;$$

consequentemente,

$$y + \triangle y = f(x + \triangle x)\ . \tag{5.3}$$

Por outro lado, $\sqrt[3]{65,5} = \sqrt[3]{64 + 1,5}\,;$ $\triangle x = 1,5\,;$ $x = 64\,;$ $y = \sqrt[3]{64} = 4\,.$

Como $\triangle x = dx$; $\triangle y \cong dy$; $dy = f'(x)\,dx$ e $dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Então substituindo $x = 64$ e $dx = 1.5$ na expressão dy, obtemos

$$dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{64^2}} \cdot 1,5 = \frac{3}{2 \cdot 3 \cdot 16} = \frac{1}{32} \approx 0,031255.$$

Portanto, utilizando os valores na expressão (5.3), segue que

$$\sqrt[3]{65,5} \cong 4 + 0,031255 = 4,031255.$$

(28) Achar o valor aproximado para $\sqrt{27}$.

Solução. Para este caso, considere

$$f(x) = \sqrt{x}$$

e

$$y + \triangle y = f(x + \triangle x)\ . \tag{5.4}$$

Por outro lado, $\sqrt{27} = \sqrt{25+2}$; $x = 25$; $\triangle x = 2$ e $\sqrt{25} = y = 5$.
Como $f'(x)\,dx = dy$; $\triangle y \cong dy$; e $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Substituindo $x = 25$; e $\triangle x = 2$ em dy, obtém-se

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 2 = \frac{1}{5} = 0,2\,.$$

Finalmente, substituindo $y = 5$ e $\triangle y \cong dy = 0.2$ na expressão (5.4), segue que

$$\sqrt{27} \cong 5 + 0,2 = 5,2.$$

(29) Determine a equação da reta normal à curva $x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0$ em $(-1, 0)$.

Solução. Efetuando a derivada da função dada implicitamente

$$x^2 + \frac{1}{2}y - 1 = 0\,,$$

obtemos,

$$2x + \frac{1}{2}y' = 0 \quad \text{ou seja} \quad f'(x) = y' = -4x\,.$$

Segue que, $m_{tg} = f'(-1) = y'\,(-1) = 4$.

Portanto, substituindo o valor de $m_{tg} = 4$ e as coordenadas do ponto $(-1, 0)$ na expressão $(y - y_0) = m_{tg}\,(x - x_0)$, obtemos a equação da reta tangente;

$$y = 4x + 1.$$

Por outro lado, o coeficiente angular da reta normal é expresso por $m_N = -\frac{1}{m_{tg}}$, isto é, $m_N = -\frac{1}{4}$ e portanto a equação da reta normal é dada por

$$y - 0 = -\frac{1}{4}(x+1) \qquad \Longrightarrow \qquad y = -\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right).$$

5.3 Regra de L'Hospital

Sejam f e g funções deriváveis num intervalo aberto I, exceto possivelmente, em um ponto $a \in I$. Suponha que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$ tem-se

(1) Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,,$$

então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,.$$

(2) Se

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,,$$

então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,.$$

5.3.1 Exercícios Resolvidos: Regra de L'Hospital

(1) Calcule o limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 6x^2 + x}{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x}$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\dfrac{0}{0}$. Para levantar esta indeterminação utiliza-se a regra de L'Hospital. Com efeito,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 6x^2 + x}{x^4 + 3x^3 + 4x^2 + x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 12x + 1}{4x^3 + 9x^2 + 8x + 1} = 1\,.$$

(2) Determine o limite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3-4x^3}{5-7x^3}$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para levantar esta indeterminação utiliza-se a regra de L'Hospital, sucessivamente, segue que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3-4x^3}{5-7x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{-12x^2}{-21x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-24x}{-42x} = \frac{4}{7}.$$

(3) Determine o valor de $\lim\limits_{x\to\infty} (3x+9)^{\frac{1}{x}}$.

Solução. A indeterminação não é do tipo estabelecida na regra de L'Hospital, mas, utilizando-se o artifício do logaritmo, em ambos os membros da igualdade, tem-se;

$$L = \lim_{x\to\infty} (3x+9)^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \ln L = \ln\left[\lim_{x\to\infty} (3x+9)^{\frac{1}{x}}\right].$$

Realizando algumas manipulações algébricas, segue que

$$\begin{aligned} \ln\left[\lim_{x\to\infty} (3x+9)^{\frac{1}{x}}\right] &= \lim_{x\to\infty} \left[\ln (3x+9)^{\frac{1}{x}}\right] \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3x+9)}{x}. \end{aligned}$$

Como esta indeterminação é do tipo L'Hospital, isto é, do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, segue que

$$\begin{aligned} \ln\left[\lim_{x\to\infty} (3x+9)^{\frac{1}{x}}\right] &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{3x+9}}{1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{3x+9} = 0. \end{aligned}$$

Entretanto,

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to\infty} (3x+9)^{\frac{1}{x}}\right] = 0 \Longleftrightarrow \ln L = 0 \Longleftrightarrow L = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty} (3x+9)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

(4) Calcule o valor de $\lim\limits_{x\to\infty} x\, sen\, \dfrac{1}{x}$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\infty.0$. Para obter a solução procede-se da seguinte forma;

$$\lim_{x\to\infty} x\, sen\, \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{sen\, \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}.$$

Efetuando-se a substituição de variável, $\frac{1}{x} = y$ e levando-se em conta que quando $x \to \infty$ tem-se $y \to 0$. A substituição e o uso do limite fundamental permite obter,

$$\lim_{x\to\infty} x\,sen\,\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{sen\,y}{y} = 1\,.$$

(5) Encontre o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{\cos x - 1}\right)$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\infty - \infty$. Mas, efetuando-se algumas manipulações algébricas, tem-se;

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{\cos x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{(\cos x - 1) - (x^2+x)}{(x^2+x)(\cos x - 1)}\right].$$

O último limite é indeterminado. A indeterminação é do tipo $\frac{0}{0}$. Portanto, aplicando-se a Regra de L'Hospital, segue que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{\cos x - 1}\right) &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{-senx - 2x - 1}{(2x+1)(\cos x - 1) + (x^2+x)(-senx)}\right] \\ &\to -\frac{1}{0} = -\infty\,.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{\cos x - 1}\right) = -\infty\,.$$

(6) Calcule o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(2x^2+x\right)^x$.

Solução. A indeterminação é do tipo 0^0. A solução é dada por

$$L = \lim_{x\to 0^+}\left(2x^2+x\right)^x \Longleftrightarrow \ln L = \ln\left(\lim_{x\to 0^+}\left(2x^2+x\right)^x\right).$$

Assim sendo, após alguns ajustes algébricos e aplicando-se a Regra de L'Hospital, segue que

$$\begin{aligned}\ln\left[\lim_{x\to 0^+}\left(2x^2+x\right)^x\right] &= \lim_{x\to 0^+}\ln\left(2x^2+x\right)^x \\ &= \lim_{x\to 0^+} x\ln(2x^2+x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(2x^2+x)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{4x+1}{2x^2+x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{(4x+1)(x^2)}{(2x^2+x)} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{4x^3+x^2}{2x^2+x} \\ &= -\lim_{x\to 0^+}\frac{12x^2+2x}{4x+1} = 0\,.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to 0^+}\left(2x^2+x\right)^x\right] = 0 \iff \ln L = 0 \iff L = 1\,.$$

Desta forma,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(2x^2+x\right)^x = 1\,.$$

(7) Determine o valor de $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$.

Solução. A indeterminação é do tipo 1^∞. A solução é construída da seguinte forma: Efetua-se uma mudança de variável em seguida utiliza-se o limite fundamental. Ou seja, considere a substituição $2x = y$. Desta forma, o resultado é dado por

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{y}{2}} = \left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}\,.$$

(8) Encontre o valor de $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para obter a solução procede-se da seguinte forma: Aplica-se a regra de L'Hospital (duas vezes). O resultado é dado por

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty\,.$$

(9) Calcule o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-\cos x}$.

Solução. Neste caso, a indeterminação é do tipo $\dfrac{0}{0}$. Para levantar a indeterminação aplica-se a regra de L'Hospital. Desta forma, segue que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x + \,sen\,x} = 1\,.$$

(10) Determine o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{2x-4}-\frac{1}{x-2}\right)$.

Solução. Neste caso, a indeterminação é do tipo $\infty-\infty$. Para levantar a indeterminação efetua-se algumas manipulações algébricas e aplica-se a regra de L'Hospital, o resultado é dado por

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{2x-4}-\frac{1}{x-2}\right) &= \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{(x-2)-(2x-4)}{(2x-4)(x-2)}\right)\\
&= \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{-x+2}{2x^2-8x+8}\right)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{-1}{4x-8}\right)=-\infty\,.
\end{aligned}$$

(11) Calcule o valor de $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

Solução. Neste caso, a indeterminação é do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para levantar a indeterminação aplica-se a regra de L'Hospital. O resultado é dado por

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{x}}=0\,.$$

(12) Determine o valor de $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sec^2\,x-2tg\,x}{1+\cos 4x}$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\dfrac{0}{0}$. Para levantar a indeterminação efetua-se uma manipulação algébrica e aplica-se a regra de L'Hospital. O resultado é dado por

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{sec^2\,x-2tg\,x}{1+\cos 4x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-2senx\cos x}{\cos^2 x(1+\cos 4x)}\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-2(\cos^2 x-sen^2\,x)}{2\cos x(1+\cos 4x)+\cos^2 x(-4sen4x)}\\
&= \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

(13) Encontre o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{senh\,x}{sen\,x}$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\dfrac{0}{0}$. Levando em consideração que

$$senh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\,.$$

Efetuando-se a substituição desta definição e aplicando-se a regra de L'Hospital, segue que

$$\lim_{x\to 0}\frac{senh\,x}{sen\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})}{2sen\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2\cos x}=\frac{2}{2}=1\,.$$

(14) Ache o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{cosh\, x - 1}{1 - \cos x}$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\dfrac{0}{0}$. Para levantar a indeterminação efetua-se a substituição

$$coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Em seguida aplicando-se a regra de L'Hospital, segue que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{cosh\, x - 1}{1 - \cos x} &= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1}{1 - \cos x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2(1 - \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2senx} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2 \cos x} = \frac{2}{2} = 1\,.
\end{aligned}$$

(15) Encontre o valor de $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^{66}}{e^x}$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para levantar a indeterminação observe o seguinte

$$f(x) = x^{66} \Rightarrow f'(x) = 66x^{65} \Rightarrow f''(x) = 66.65x^{64} \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow f^{(66)}(x) = 66!\,.$$

Por outro lado,

$$g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x \Rightarrow \ldots \Rightarrow g^{(66)}(x) = e^x\,.$$

Portanto, aplicando-se a regra de L'Hospital sucessivamente, obtém-se

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{66}}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{66!}{e^x} = \infty\,.$$

(16) Calcule o valor de $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3^x}{3^x - 1}$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para levantar a indeterminação aplica-se a regra de L'Hospital

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3^x}{3^x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3^x}{3^x} = 1\,.$$

(17) Encontre o valor de $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{2[1 - \sqrt{x}]} - \dfrac{1}{3[1 - \sqrt[3]{x}]} \right)$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\infty - \infty$. Para levantar a indeterminação define-se a substituição

$$y^6 = x \Rightarrow \sqrt{x} = y^3 \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{x} = y^2\,, \qquad y \to 1\,.$$

efetuando-se a substituição, tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{2[1-\sqrt{x}]} - \frac{1}{3[1-\sqrt[3]{x}]}\right) &= \lim_{y\to 1}\left(\frac{1}{2[1-y^3]} - \frac{1}{3[1-y^2]}\right)\\
&= \lim_{y\to 1}\left(\frac{3(1-y^2)-2(1-y^3)}{6(1-y^2)(1-y^3)}\right)\\
&= \lim_{y\to 1}\left(\frac{2y^3-3y^2+1}{6y^5-6y^3-6y^2+6}\right).
\end{aligned}$$

Aplicando-se a regra de L'Hospital mais de uma vez, obtêm-se

$$\lim_{y\to 1}\left(\frac{2y^3-3y^2+1}{6y^5-6y^3-6y^2+6}\right) = \lim_{y\to 1}\frac{6y^2-6y}{30y^4-18y^2-12y} = \lim_{y\to 1}\left(\frac{12y-6}{120y^3-36y-12}\right) = \frac{1}{12}\,.$$

(18) Determine o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{3}{x^4+\ln x}\right)}$.

Solução. A indeterminação é do tipo 0^0. Para levantar a indeterminação procede-se da seguinte forma: Aplica-se logaritmo e em seguida utiliza-se a regra de L'Hospital. O resultado é dado por

$$L = \lim_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{3}{x^4+\ln x}\right)} \Longrightarrow \ln L = \ln\left[\lim_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{3}{x^4+\ln x}\right)}\right].$$

Desta forma então

$$\begin{aligned}
\ln\left[\lim_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{3}{x^4+\ln x}\right)}\right] &= \lim_{x\to 0^+} \ln x^{\left(\frac{3}{x^4+\ln x}\right)}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{3\ln x}{x^4+\ln x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{3}{x}}{4x^3+\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{4x^4+1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{3}{4x^4+1} = 3\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{3}{x^4+\ln x}\right)}\right] = 3 \Longrightarrow \ln L = 3 \Longrightarrow L = e^3\,.$$

Assim sendo,

$$L = \lim_{x\to 0^+} x^{\left(\frac{3}{x^4+\ln x}\right)} = e^3\,.$$

(19) Ache o valor de $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Solução. A indeterminação é do tipo ∞^0. Para levantar a indeterminação procede-se da seguinte forma: Aplica-se logaritmo e em seguida utiliza-se a regra de L'Hospital. O resultado é dado por

$$L = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{1-x}} \Leftrightarrow \ln L = \ln\left[\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{1-x}}\right] .$$

Desta forma então,

$$\begin{aligned}
\ln L = \ln\left[\lim_{x\to\infty} x^{\left(\frac{1}{1-x}\right)}\right] &= \lim_{x\to\infty} \ln\left[x^{\left(\frac{1}{1-x}\right)}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1-x}\right)\ln x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln x}{1-x}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{1-x}}\right] = 0 \Longrightarrow \ln L = 0 \Longrightarrow L = e^0 = 1 .$$

Assim sendo,

$$L = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{1-x}} = 1 .$$

(20) Encontre o valor de $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{sen\,x}$.

Solução. A indeterminação é do tipo 0^0. Para levantar a indeterminação procede-se da seguinte forma: Aplica-se logaritmo e em seguida utiliza-se a regra de L'Hospital. O resultado é dado por

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to 0^+} x^{sen\,x}\right] .$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\ln\left[\lim_{x\to 0^+} x^{sen\,x}\right] &= \lim_{x\to 0^+} \ln\left[x^{senx}\right] \\
&= \lim_{x\to 0^+} senx \ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{senx}} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{sen^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{sen^2 x}{x\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{2senx\cos x}{\cos x - xsenx} = \frac{0}{1} = 0 .
\end{aligned}$$

Desta forma, então

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to 0^+} x^{sen\, x}\right] = 0 \Longrightarrow \ln L = 0 \Longrightarrow L = 1\,.$$

Portanto,

$$L = \lim_{x\to 0^+} x^{sen\, x} = 1\,.$$

(21) Calcule o valor de $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)^{\frac{2}{x}}$.

Solução. A indeterminação é do tipo ∞^0. Para levantar a indeterminação procede-se da seguinte forma: Aplica-se logaritmo e em seguida utiliza-se a regra de L'Hospital. O resultado é dado por

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to\infty}(2x-1)^{\frac{2}{x}}\right] .$$

Isto é,

$$\begin{aligned}
\ln\left[\lim_{x\to\infty}(2x-1)^{\frac{2}{x}}\right] &= \lim_{x\to\infty} \ln\left[(2x-1)^{\frac{2}{x}}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\ln(2x-1) = 2\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{2x-1}}{1} \\
&= 4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x-1} = 0\,.
\end{aligned}$$

Desta forma, então

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to\infty}(2x-1)^{\frac{2}{x}}\right] = 0 \Leftrightarrow \ln L = 0 \Leftrightarrow L = 1\,.$$

Portanto,

$$L = \lim_{x\to\infty}(2x-1)^{\frac{2}{x}} = 1\,.$$

(22) Determine o valor de $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

Solução. A indeterminação é do tipo 1^∞. Para levantar a indeterminação procede-se da seguinte forma: Aplica-se logaritmo e em seguida utiliza-se a regra de L'Hospital. O resultado é dado por

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}\right] .$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\ln\left[\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}\right] &= \lim_{x\to 0}\ln\left[(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}\right] \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\ln(\cos 2x) = 3\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2sen2x}{\cos 2x}}{2x} \\
&= -\frac{6}{2}\lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{x\cos 2x} = -3\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x}{\cos 2x - 2xsen2x} = -3.\frac{2}{1-0} = -6\,.
\end{aligned}$$

Desta forma, então

$$\ln L = \ln\left[\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}\right] = -6 \Leftrightarrow \ln L = -6 \Leftrightarrow L = e^{-6}\,.$$

Portanto,

$$L = \lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6}\,.$$

(23) Calcule o valor de $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x+\ln x}$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para resolver a indeterminação utiliza-se a regra de L'Hospital. O resultado é dado por

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\ln x}{x+\ln x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x + x\,\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x + 1}{1+\frac{1}{x}} = \infty\,.$$

(24) Determine o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-9}\right)$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\infty - \infty$. Para resolver a indeterminação deve-se utilizar uma manipulação algébrica para ajustar a expressão, em seguida, aplica-se a regra de L'Hospital. Ou seja,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3^+}\left[\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-9}\right] &= \lim_{x\to 3^+}\left[\frac{(x+3)-1}{(x^2-9)}\right] \\
&= \lim_{x\to 3^+}\left[\frac{x+2}{(x-3)(x+3)}\right] = +\infty\,.
\end{aligned}$$

(25) Encontre o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x - x}{e^x + e^{-x} - 2}$.

Solução. A indeterminação é do tipo $\dfrac{0}{0}$. Para levantar a indeterminação aplica-se a regra de L'Hospital. Senão vejamos,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x - x}{e^x + e^{-x} - 2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to 0}\frac{-sen\,x}{e^x + e^{-x}} = \frac{0}{2} = 0\,.$$

(26) Calcule o valor de $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}\,.$

Solução. A indeterminação é do tipo ∞^0. Para levantar a indeterminação aplica-se logarítmo em ambos os membros da expressão em seguida utiliza-se a regra de L'Hospital. O resultado segue

$$L = \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x} \Leftrightarrow \ln L = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}\right]\,.$$

Assim sendo,

$$\ln\left[\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\ln x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0\,.$$

Portanto, como $\ln L = 0$ então $L = 1\,.$

Ou seja,

$$L = \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x} = 1\,.$$

(27) Calcule o valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x}\,,\qquad a > 0.$

Solução. Estamos diante de uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$. Inicialmente, lembre-se que

$$f(x) = a^x \quad\Rightarrow\quad f'(x) = a^x\ln a\,.$$

Assim sendo, aplicando-se a regra de L'Hospital, tem-se imediatamente que;

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a}{1} = \ln a\,.$$

(28) Determine o valor $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{x}\,.$

Solução. A indeterminação é do tipo $\dfrac{0}{0}$. Para resolver este limite aplica-se diretamente a regra de L'Hospital, o resultado é dado por

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1\,.$$

(29) Encontre o valor de $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Solução. A indeterminação é do tipo 1^∞. Para levantar a indeterminação aplica-se logarítmo em ambos os membros da expressão em seguida utiliza-se a regra de L'Hospital. Senão vejamos

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \Leftrightarrow \ln L=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right].$$

Ou seja,

$$\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

Isto é,

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Aplicando-se a regra de L'Hospital, segue que

$$\ln L=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}\!-\!\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

Como, $\ln L=1$ então $L=e$, assim sendo,

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

5.4 Máximos e Mínimos

5.4.1 Máximo Relativo

Uma função f tem um máximo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c)\geq f(x)$ para todo $x\in I\cap D_f$.

5.4.2 Mínimo Relativo

Uma função f tem um mínimo relativo em c, se existir um intervalo aberto I, contendo c, tal que $f(c)\leq f(x)$ para todo $x\in I\cap D_f$.

5.4.3 Extremo Relativo

Suponhamos que f esteja definida para todos os valores de $x\in(a,b)$ e que f tem um extremo relativo em c, onde $a<c<b$. Se $f'(c)$ existe, então $f'(c)=0$.

5.4.4 Extremo Absoluto

Seja $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua, definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Então f assume máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$.

5.4.5 Monótona Crescente

Diz-se que uma função f, definida num intervalo I, é crescente neste intervalo se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) \leq f(x_2)$.

5.4.6 Monótona Decrescente

Diz-se que uma função f, definida num intervalo I, é decrescente nesse intervalo, se para quaisquer $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Observação Se uma função é crescente ou decrescente num intervalo, diz-se que é monótona neste intervalo.

5.4.7 Intervalos de Monotocidade

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo (a, b), então

(1) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é crescente em $[a, b]$.

(2) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ então f é decrescente em $[a, b]$.

5.4.8 Critério da Derivada Primeira

Seja f uma função contínua num intervalo fechado $[a, b]$ que possui derivada em todo o ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto c, então

(1) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.

(2) Se $f'(x) < 0$ para 'todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.

5.4.9 Critério da Derivada Segunda

Sejam f uma função derivável num intervalo (a, b) e c um ponto crítico de f neste intervalo, isto é, $f'(c) = 0$, com $a < c < b$. Se f admite a derivada f'' em (a, b), tem-se

(1) Se $f''(c) < 0$, f tem um valor máximo relativo em c.

(2) Se $f''(c) > 0$, f tem um valor mínimo relativo em c.

5.4.10 Concavidade voltada para Cima

Uma função f é dita côncava para cima no intervalo (a, b), se $f'(x)$ é crescente neste intervalo.

5.4.11 Concavidade voltada para Baixo

Uma função f é côncava para baixo no intervalo (a, b), se $f'(x)$ for decrescente neste intervalo.

5.4.12 Critério Geral sobre Concavidade

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável até segunda ordem no intervalo (a, b), então

(1) Se $f''(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para cima em (a, b).

(2) Se $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é côncava para baixo em (a, b).

5.4.13 Ponto de Inflexão

Um ponto $P(c, f(c))$ do gráfico de uma função contínua f é chamado um ponto de inflexão, se existe um intervalo (a, b) contendo c, tal que uma das seguintes situações ocorra

(1) f é côncava para cima em (a, c) e côncava para baixo em (c, b).

(2) f é côncava para baixo em (a, c) e côncava para cima em (c, b).

5.4.14 Assíntotas

É comum encontrar-se no esboço do gráfico de algumas funções traçados de curvas que se aproximam de uma reta a medida que x cresce ou decresce. Particularmente, nosso interesse é analisar com um pouco mais de atenção as assíntotas horizontais e as verticais.

5.4.15 Assíntota Vertical

A reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

(1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$;

(2) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$;

(3) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$;

(4) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

5.4.16 Assíntota Horizontal

A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal do gráfico de $y = f(x)$, se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira:

(1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$;

(2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Abaixo apresenta-se uma tabela com as etapas e procedimentos cuja finalidade consiste em auxiliar o leitor na construção do gráfico de uma função mediante o uso dos resultados e definições apresentados acima.

Etapas	Procedimentos
1^o passo	Encontrar o D_f .
2^o passo	Encontrar os pontos de Intersecção da função com os eixos.
3^o passo	Encontrar os pontos críticos.
4^o passo	Encontrar os locais de crescimento e decrescimento da função.
5^o passo	Encontrar os máximos e mínimos
6^o passo	Encontrar a concavidade
7^o passo	Encontrar as assíntotas (verticais e horizontal)
8^o passo	Construir o gráfico.

Exemplo 1. Utilizando-se os passos apresentados na tabela acima esboce o gráfico da função $f(x) = x^3 - 5x + 4$.

1^o passo: Determinar o Domínio da função. Neste caso, $D_f = \mathbb{R}$.

2^o passo: Encontre os pontos de intersecção da função com os eixos: É fácil observar que $f(0) = 4$ isto é, $(0, 4)$ e $f(1) = 0$ ou seja, $(1, 0)$. Portanto, segue que $(0, 4)$ e $(1, 0)$

são os pontos de intersecção com os eixos.

3^o passo: Encontre os pontos críticos: Deve-se encontrar $c \in D_f$ tal que $f'(c) = 0$. Assim sendo,

$$f'(x) = 3x^2 - 5 \Rightarrow 3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}\,.$$

Portanto, $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$, são os pontos críticos da função f.

4^o passo: Os Intervalos de crescimento e decrescimento são determinados da seguinte forma:

$$f'(x) = 3x^2 - 5 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, -\sqrt{\frac{5}{3}}\right[\bigcup \left]\sqrt{\frac{5}{3}}, +\infty\right[\,.$$

Por outro lado,

$$f'(x) = 3x^2 - 5 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right[\,.$$

Desta forma, f é crescente sempre que $x \in \left]-\infty, -\sqrt{\frac{5}{3}}\right[\bigcup \left]\sqrt{\frac{5}{3}}, +\infty\right[$ e será decrescente sempre que $x \in \left]-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right[$.

5^o passo: Os máximos e mínimos são determinados utilizando-se o critério da segunda derivada, senão vejamos:

$$f''(x) = 6x\,.$$

Como $f''\left(-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) < 0$ então f tem um máximo relativo em $x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Como $f''\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right) > 0$ então f tem um mínimo relativo em $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$.

6^o passo: Os intervalos onde a função é côncava são dados por:

Como $f''(x) < 0$ quando $x < 0$ então f é côncava para baixo sempre que $x \in]-\infty, 0[$.

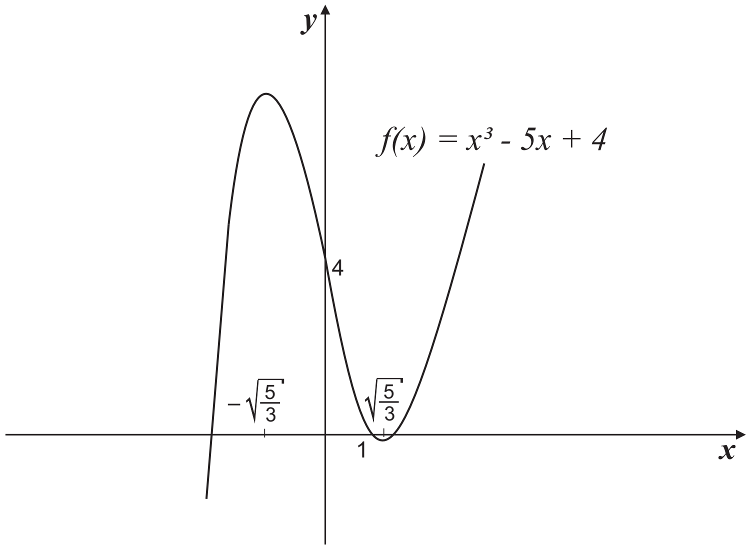
Por outro lado,

Como $f''(x) > 0$ quando $x > 0$ então f é côncava para cima sempre que $x \in]0, \infty[$.

Portanto, $(0, 4)$ é um ponto de inflexão da função f.

7^o passo: Neste caso, não existem assíntotas.

8^o passo: Esboçar o gráfico a partir destas informações:



Exemplo 2. Esboce o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$.

1º passo: Determinar o Domínio da função. Neste caso, $D_f = \mathbb{R} - 3$.

2º passo: Encontre os pontos de intersecção da função com os eixos: É fácil observar que $f(0) = 0$ isto é, $(0,0)$. Portanto, segue que $(0,0)$ é um ponto de intersecção com os eixos.

3º passo: Encontre os pontos críticos: Deve-se encontrar $c \in D_f$ tal que $f'(c) = 0$. Assim sendo,

$$f'(x) = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2} \Rightarrow \frac{x(x-6)}{(x-3)^2} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 6\,.$$

Portanto, $x = 0$ e $x = 6$ são os pontos críticos da função f.

4º passo: Os Intervalos de crescimento e decrescimento são determinados da seguinte forma:

$$f'(x) = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2} > 0 \Leftrightarrow x(x-6) > 0 \Leftrightarrow x \in\ ]-\infty, 0[\, \cup\,]6, +\infty[\ .$$

Por outro lado,

$$f'(x) = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2} < 0 \Leftrightarrow x \in\ ]0, 6[\ .$$

Desta forma, f é crescente sempre que $x \in\ ]-\infty, 0[\, \cup\,]6, +\infty[$ e será decrescente sempre que $x \in\ ]0, 6[$.

5º passo: Os máximos e mínimos são determinados utilizando-se o critério da segunda derivada, senão vejamos:

$$f''(x) = \frac{18x - 54}{(x-3)^4}\,.$$

Como $f''(0) < 0$ então f tem um máximo relativo em $x = 0$.

Como $f''(6) > 0$ então f tem um mínimo relativo em $x = 6$.

6^o passo: Os intervalos onde a função é côncava são dados por:

Como $f''(x) < 0$ quando $x < 3$ então f é côncava para baixo sempre que $x \in]-\infty, 3[$.

Por outro lado,

Como $f''(x) > 0$ quando $x > 3$ então f é côncava para cima sempre que $x \in]3, \infty[$.

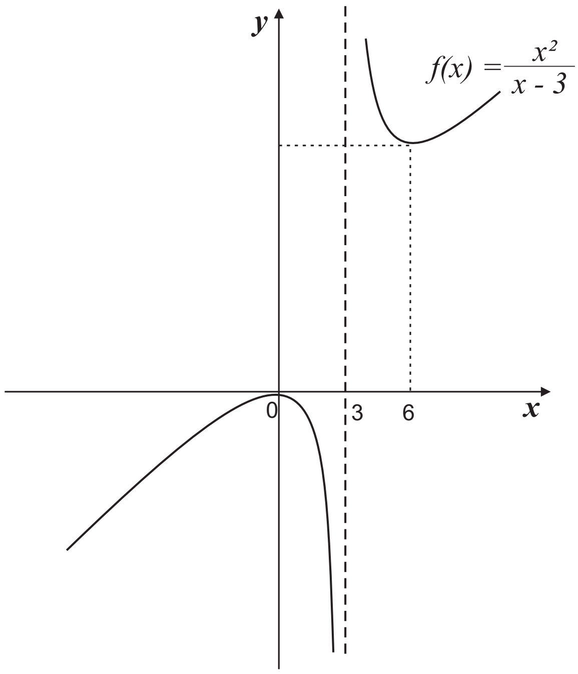
Portanto, em $x = 3$ a função f tem inflexão.

7^o passo: Neste caso, não existem assíntotas horizontais, entretanto, como

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2}{x-3} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 3^-} \frac{x^2}{x-3} = -\infty$$

Segue então que $x = 3$ é uma assíntota vertical para a função f.

8^o passo: Esboçar o gráfico a partir destas informações



Exemplo 3. Utilizando-se os passos apresentados na tabela acima esboce o gráfico da função $f(x) = e^{-x^2}$.

1^o passo: Determinar o Domínio da função. Neste caso, $D_f = \mathbb{R}$.

2^o passo: Encontre os pontos de intersecção da função com os eixos: É fácil observar que $f(0) = 1$ isto é, $(0, 1)$. Portanto, segue que $(0, 1)$ é o ponto de intersecção com o eixo dos y.

3^o passo: Encontre os pontos críticos: Deve-se encontrar $c \in D_f$ tal que $f'(c) = 0$.
Assim sendo,

$$f'(c) = -2c\, e^{-c^2} \Longrightarrow -2c\, e^{-c^2} = 0 \Longrightarrow c = 0\,.$$

Portanto, $c = 0$, é o ponto crítico da função f.

4^o passo: Os Intervalos de crescimento e decrescimento. Neste caso, o leitor deve observar que a função $f(x) = e^{-x^2}$ é sempre positiva. Portanto, a análise torna-se simples, isto é,

$f'(x) = -2x\, e^{-x^2} > 0$ sempre que $x < 0$, ou seja, f é crescente para todo $x \in (-\infty, 0)$.
Por outro lado, $f'(x) = -2x\, e^{-x^2} < 0$ sempre que $x > 0$, ou seja, f é decrescente para todo $x \in (0, \infty)$.

5^o passo: Os máximos e mínimos são determinados utilizando-se o critério da segunda derivada, senão vejamos:

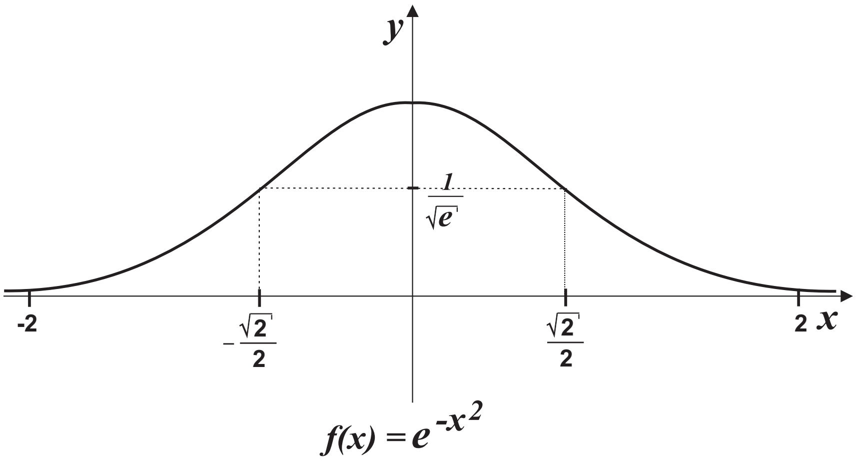
$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2)\,.$$

Aplicando o ponto crítico $x = 0$, segue que $f''(0) = -2$, significa que f tem um máximo relativo em $x = 0$.

6^o passo: Os intervalos onde a função é côncava são dados por:
Como $f''(x) < 0$ quando $x \in \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ então f é côncava para baixo neste intervalo.
Por outro lado,
Como $f''(x) > 0$ quando $x \in \left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$ então f é côncava para cima neste intervalo. Portanto, $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ e $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ são pontos de inflexão da função f.

7^o passo: A função $f(x) = e^{-x^2}$ tem uma assíntota horizontal $y = 0$.

8^o passo: Esboçar o gráfico a partir destas informações



Teorema do Valor Médio.

Seja $f : [a, b] \to R$ contínua e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Geometricamente, existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ onde a tangente à curva é paralela à corda que une os pontos $(a, f(a))$ até $(b, f(b))$.

Teorema de Rolle.

Seja f uma função definida e contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b). Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto c entre a e b tal que

$$f'(c) = 0.$$

Geometricamente, existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ onde a tangente à curva é paralela (coincidente) ao eixo das abscissas.

Aplicações dos Teoremas do Valor Médio e de Rolle.

(1) Verifique se o Teorema do Valor Médio se cumpre. Caso afirmativo, encontre c onde $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ para o caso em que $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; $a = -1$ e $b = 0$.

Solução. A função

$$\begin{aligned} f : \ [-1, 0] &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

é contínua em $[-1,0]$.

Por outro lado,

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

existe em $(-1,0)$. Logo, f cumpre as hipóteses do Teorema do Valor Médio. Portanto existe $c \in (-1,0)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(0) - f(-1)}{0-(-1)}\,.$$

De fato,

$$\frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{1-0}{0+1} = 1 \Longleftrightarrow \sqrt{1-c^2} = -c\,,$$

isto é, resolvendo-se a equação, segue como candidatos às raízes os seguintes valores:

$$c = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\,.$$

Levando-se em conta o intervalo de definição da função f isto é, $[-1,0]$, segue que,

$$c = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2) A função $f(x) = x^{2/3} - 1$ é tal que $f(-1) = f(1) = 0$. f verifica o Teorema de Rolle? **Solução.** A resposta é negativa.

Como $f(x) = x^{2/3} - 1$ então $f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ que não é derivável (não existe) em $x = 0$. Observe que f é contínua em $(-1,1)$ e $f(-1) = f(1) = 0$; porém, f não cumpre a hipótese de ser derivável em $x = 0 \in (-1,1)$. Portanto, não vale o Teorema de Rolle.

5.5 Exercícios Propostos

(1) Seja

$$f(x) = sen^2\,x - \frac{tg\,x}{x^2}\,.$$

Determine:

(a) $f'(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,x}{x^2}$.

(2) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y - x^2 - 3x + 2 = 0$ em $(3, 2)$. Depois, determine a equação desta reta.

(3) Seja

$$f(x) = |4 - x^2|\,.$$

Calcule:

(a) $f'_+(2)$;

(b) $f'_-(2)$;

(c) $f'(2)$ existe ? Justifique.

(4) Ache o valor aproximado para $\sqrt{28}$ usando diferenciais.

(5) Determine o valor do limite $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x$.

(6) Determine o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2 + 2x} - \frac{1}{\cos x - 1}\right)$.

(7) Encontre a derivada da função dada implicitamente por

$$\cos(xy) - sen\, 2x = 0\,.$$

(8) Esboce o gráfico da função

$$g(x) = \frac{x^2}{x - 2}\,.$$

(9) Verifique se o Teorema do Valor Médio se cumpre. Em caso afirmativo, encontre c onde

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

para o caso em que

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \qquad a = -2 \;\; e \;\; b = 0\,.$$

(10) Encontre a derivada das funções

(a) $f(x) = \dfrac{(x^4 - 5x^2 - 2)\sqrt{x-1}}{e^{2x} - \ln(1-x)}$;

(b) $g(x) = \dfrac{\cos x^3 + cotg(x-2)}{arcsen\, x - \sqrt{x^3 - 1}}$.

(11) Determine a equação da reta normal à curva $x^2 + \dfrac{1}{2}y - 1 = 0$ em $(-1, 0)$.

Lembrete: A equação da reta é dada por $y - y_0 = m(x_0)(x - x_0)$.

$m(x_0)$ é o coeficiente angular da reta e (x_0, y_0) um ponto desta reta.

(12) Determine o valor do limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2x}\right)^x$.

(13) Esboce o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

utilizando a informações da teoria sobre máximo e mínimo.

(14) Seja

$$f(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)\sqrt{x-1}}{(x-1)} .$$

Determine:

(a) $f'(x)$

(b) $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$.

(15) Seja $y = \ln\left[2xw + \operatorname{sen}\dfrac{x}{w}\right]$. Determine (a) $\dfrac{dy}{dx}$ e (b) $\dfrac{dy}{dw}$.

(16) Seja $f(x) = x^2 e^x \operatorname{sen} 4x$ então calcule $f'(0)$.

(17) Determine a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = (x^2 - 3x)^{\frac{1}{3}}$ **(b)** $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 - 1}{e^x + 2}$ **(c)** $f(x) = \cos\sqrt{3x}$

(d) $f(x) = (3x-2)^{e^x}$ **(e)** $f(x) = \operatorname{cotg}\left[\dfrac{x}{e^x}\right]$ **(f)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{5x-1}}{\cos 3x}$

(g) $f(x) = e^{\frac{x^3}{2}}$ **(h)** $f(x) = \ln(3-2x)$ **(i)** $f(x) = x\,e^{-x}$ **(j)** $f(x) = \dfrac{x^2\,e^x}{\ln\,x}$

(k) $f(x) = (2x^2 - 5x^3)^{4x+2x^5}$ **(l)** $f(x) = e^{\frac{x}{a}} + \ln\,x^2$ **(m)** $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-8}$

(n) $f(x) = \operatorname{tg} x\, - \dfrac{\operatorname{cossec} x}{1-\cos x}$ **(o)** $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$ **(p)** $f(x) = \ln\left(\text{arc cos}\,\dfrac{x}{2}\right)$

(18) Determine y' das seguintes funções implícitas

(a) $x^3 + y^3 = a^3$ **(b)** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ **(c)** $a\cos^2(xy) = b$

(d) $e^y + 1 = xy$ **(e)** $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$ **(f)** $y^2 + x^2 = a^2 + b^2$

(19) Sejam $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1\,,$ $g(x) = \operatorname{sen} 2x$ e $h(x) = e^{3x}$ calcule

(a) $f''(x)\,,\ g''(x)$ e $h''(x)$ **(b)** $f'''(x)\,,\ g^{(IV)}(x)$ e $h^{(n)}(x)\,.$

(20) Sabendo que $F(x) = ye^{2xy} + \ln\,(x+y+z)$ determine as seguintes derivadas:

(a) $\dfrac{dF(x)}{dy}$ **(b)** $\dfrac{dF(x)}{dx}$ **(c)** $\dfrac{d^2F(x)}{dx^2}$ e **(d)** $\dfrac{d^2F(x)}{dy^2}\,.$

(21) Seja $y = x\,e^{-x}$ verifique se y satisfaz a seguinte equação

$$x\dot{y} = (1-x)y \quad \text{onde} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dx}\,.$$

(22) Seja $y = \dfrac{1}{(1+x+\ln\,x)}$ verifique se y satisfaz a equação diferencial

$$x\dot{y} = y(y\ln\,x\, - 1)\,.$$

(23) Seja

$$H(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se} \quad x \le 0 \\ e^{-x} & \text{se} \quad x > 0\,. \end{cases}$$

Determine $H'(x)$.

(24) Seja $f(x) = e^{ax}$ calcule $F(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)x^2}{2}\,.$

Capítulo 6

Métodos de Integração

6.1 Método da Substituição

A ideia deste método consiste em reescrever a expressão do integrando, original de forma equivalente, através de outra expressão, para que o novo integrando produza uma nova integral cuja solução seja conhecida. Em linhas gerais, a técnica consiste essencialmente numa mudança de variável para que seja possível escrever de forma equivalente à expressão original. Este processo é análogo à regra da cadeia para derivação. Isto é, sejam $f(x)$ e $F(x)$ duas funções tais que $F'(x) = f(x)$. Suponha que g seja outra função derivável tal que a imagem de g esteja contida no domínio de F. Considera-se a função composta $F(g(x))$, então pela regra da cadeia, tem-se

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)\,,$$

isto é, $F(g(x))$ é uma primitiva para $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Assim sendo,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c\,. \qquad (A)$$

Fazendo

$$u = g(x), \quad du = g'(x)dx \quad \text{e substituindo em} \quad (A)$$

vem que

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + c\,.$$

Na prática, deve-se então definir uma função $u = g(x)$ conveniente, de tal forma que a integral obtida seja mais simples.

6.1.1 Exercícios Resolvidos: Método da Substituição de Variável

(1) Calcule a integral $\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}dx$.

Solução. Seja $u = 1 + x^2$ então $\dfrac{du}{dx} = 2x$, ou seja, $du = 2xdx$, então

$$\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \int \frac{du}{u} = ln|u| + c.$$

Como $u = 1 + x^2$; segue que

$$\int \frac{2x}{1+x^2} = ln|1+x^2| + c = ln(1+x^2) + c.$$

(2) Encontre a solução de $\displaystyle\int \text{sen}^2 x \cos x dx$.

Solução. Seja $u = \text{sen}x$ então $\dfrac{du}{dx} = \cos x$, isto é, $du = \cos x dx$, então

$$\int \text{sen}^2 x \cos x dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c.$$

Como $u = \text{sen}x$ segue que,

$$\int \text{sen}^2 x \cos x dx = \frac{\text{sen}^3 x}{3} + c.$$

(3) Determine o valor de $\displaystyle\int \cos(x+8)dx$.

Solução. Seja $u = x + 8$ então $\dfrac{du}{dx} = 1$, isto é, $du = dx$ então

$$\int \cos(x+8)dx = \int \cos u du = \text{sen}u + c.$$

Como $u = (x+8)$ segue que,

$$\int \cos(x+8)dx = \text{sen}(x+8) + c.$$

(4) Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$.

Solução. Observe que

$$x^2 + 6 + 13 = x^2 + 6x + 9 + 4 = (x+3)^2 + 4.$$

Seja $x+3=u$ então $du=dx$, assim sendo,

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = \int \frac{du}{x^2+2^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{2}+c\,.$$

Como $u=x+3$ segue que

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+3}{2}+c\,.$$

(5) Determine o valor de $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}dx\,.$

Solução. Considere, $u=\sqrt{x-2} \Rightarrow u^2 = x-2 \Rightarrow x = u^2+2 \Rightarrow dx = 2udu\,.$ Portanto,

$$\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}dx = \int \frac{u}{(u^2+2)+1}2udu = 2\int \frac{u^2du}{u^2+3}\,.$$

Somando-se e subtraindo-se 3 ao numerador, tem-se

$$\begin{aligned} 2\int \frac{(u^2+3-3)du}{u^2+3} &= 2\left[\int \frac{u^2+3}{u^2+3} - 3\int \frac{du}{u^2+3}\right] \\ &= 2\left[\int du - 3\int \frac{du}{u^2+3}\right] = 2\left[u - \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{\sqrt{3}}+c\right]. \end{aligned}$$

Substituindo-se, $u=\sqrt{x-2}\,,$ o resultado é dado por,

$$\int \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}dx = 2\left[\sqrt{x-2} - \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3}}+c\right].$$

(6) Calcule $\displaystyle\int (2x^2+2x-3)^{10}(2x+1)dx\,.$

Solução. Escolhendo-se a substituição $u=(2x^2+2x-3)$ é fácil observar que

$$du = (4x+2)dx = 2(2x+1)dx \quad \text{isto é,} \quad \frac{du}{2} = (2x+1)dx\,.$$

Desta forma, o resultado segue e dada por:

$$\int (2x^2+2x-3)^{10}(2x+1)dx = \frac{1}{2}\int u^{10}du = \frac{1}{2}.\frac{u^{11}}{11}+c = \frac{1}{22}(2x^2+2x-3)^{11}+c\,.$$

(7) Determine $\displaystyle\int (e^{2t}+2)^{\frac{1}{3}}\,e^{2t}dt\,.$

Solução. A partir da substituição $u=(e^{2t}+2)$ obtém-se,

$$du = (2e^{2t})dt \quad \text{isto é,} \quad \frac{du}{2} = (e^{2t})dt\,.$$

Portanto,

$$\int (e^{2t}+2)^{\frac{1}{3}}(e^{2t})dt = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}du = \frac{1}{2}.\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{8}(e^{2t}+2)^{\frac{4}{3}} + c\,.$$

(8) Calcule $\displaystyle\int \frac{2\sec^2 x}{(a+b)\text{tg}x}dx\,.$

Solução. Seja $u = (a+b)\text{tg}x$ então $du = (a+b)\sec^2 x dx$.
Como,

$$\frac{2du}{(a+b)} = 2\sec^2 x dx\,,$$

segue que;

$$\int \frac{2\sec^2 x}{(a+b)\text{tg}\,x}dx = \int \frac{1}{u}\frac{2}{(a+b)}du = \frac{2}{(a+b)}\int \frac{du}{u}\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{2\sec^2 x}{(a+b)\text{tg}\,x}dx = \frac{2}{(a+b)}\ln|u| + c = \frac{2}{(a+b)}\ln|(a+b)\text{tg}\,x| + c\,.$$

(9) Encontre $\displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{v}(1+\sqrt{v})^5}\,.$

Solução. Efetuando-se a substituição $u = 1+\sqrt{v}$, obtém-se $2du = \dfrac{dv}{\sqrt{v}}\,.$
Portanto,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v}(1+\sqrt{v})^5} = \int \frac{2du}{u^5} = 2.\int \frac{du}{u^5} = -\frac{1}{2u^4} + c = -\frac{1}{2(1+\sqrt{v})^4} + c\,.$$

(10) Determine $\displaystyle\int x^4 e^{-x^5}dt\,.$

Solução. Seja $u = (-x^5)$ então, segue que $\dfrac{-du}{5} = (x^4)dx\,.$
Portanto,

$$\int x^4 e^{-x^5}dx = -\int \frac{du}{5}e^u = -\frac{1}{5}\int e^u du = -\frac{1}{5}e^u + c = -\frac{1}{5}e^{-x^5} + c\,.$$

(11) Calcule $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx\,.$

Solução. Considere a substituição, $u = \ln x$ então $du = \dfrac{dx}{x}\,.$

Portanto,

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{(\ln x)^3}{3} + c\,.$$

(12) Determine o valor da $\displaystyle\int \sec^2(5x+3)dx\,.$

Solução. Seja $u = 5x + 3\,,$ então $\dfrac{du}{5} = dx\,.$

Portanto,

$$\int \sec^2(5x+3)dx = \int \frac{\sec^2 u\, du}{5} = \frac{1}{5}\int \sec^2 u du = \frac{1}{5}\text{tg}u + c = \frac{1}{5}\text{tg}(5x+3) + c\,.$$

(13) Calcule $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+16}dx\,.$

Solução. Seja $u = e^x$ então $du = e^x dx\,.$

Portanto,

$$\int \frac{e^x\, dx}{e^{2x}+16} = \int \frac{du}{u^2+16} = \int \frac{du}{u^2+4^2} = \frac{1}{4}\text{arc tg}\frac{u}{4} + c = \frac{1}{4}\text{arc tg}\frac{e^x}{4} + c\,.$$

(14) Calcule $\displaystyle\int \sqrt{3t^4+t^2}dt\,.$

Solução. Considere $u = 3t^2 + 1$ então $du = 6tdt\,,$ ou seja, $\dfrac{du}{6} = tdt\,.$

Observe que,

$$\int \sqrt{3t^4+t^2}dt = \int \sqrt{t^2(3t^2+1)}dt = \int t(\sqrt{3t^2+1})dt\,.$$

Portanto,

$$\frac{1}{6}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{6}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{18}(3t^2+1)^{\frac{3}{2}} + c\,.$$

Assim sendo,

$$\int \sqrt{3t^4+t^2}dt = \frac{2}{18}(3t^2+1)^{\frac{3}{2}} + c\,.$$

(15) Determine $\displaystyle\int xe^{3x^2}\,dx\,.$

Solução. Seja $u = 3x^2$ então tem-se, $du = 6xdx$ isto é, $\dfrac{du}{6} = xdx\,.$
Portanto,

$$\int xe^{3x^2}dx = \int \frac{du}{6}e^u = \frac{1}{6}\int e^u\,du = \frac{1}{6}e^u + c = \frac{1}{6}e^{3x^2} + c\,.$$

(16) Encontre o valor de $\displaystyle\int (\text{sen}4x + \cos 2\pi)dx\,.$

Solução.

$$\int (\text{sen}4x + \cos 2\pi)dx = \int \text{sen}4xdx + \int \cos 2\pi dx = \int \text{sen}4xdx + \cos 2\pi \int dx\,.$$

Resolvendo-se a primeira integral, isto é, utilizando-se a substituição, $u = 4x\,,$ segue que $du = 4dx$. Portanto,

$$\int \text{sen}4xdx = \int \text{sen}u\frac{du}{4} = -\frac{1}{4}\cos u + c_1 = -\frac{1}{4}\cos 4x + c_1\,.$$

Por outro lado,

$$\cos 2\pi \int dx = x\cos 2\pi + c_2 = x + c_2\,.$$

Assim sendo, escolhendo-se, $c = c_1 + c_2\,.$ O resultado é dado por,

$$\int (\text{sen}4x + \cos 2\pi)dx == -\frac{1}{4}\cos 4x + x + c\,.$$

(17) Calcule $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx\,.$

Solução. Seja $u = \sqrt{x}$ então $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$, isto é, $2du = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}\,.$
Portanto,

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \cos udu = 2\text{sen}u + c = 2\text{sen}\sqrt{x} + c\,.$$

Logo,

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\text{sen}\sqrt{x} + c\,.$$

(18) Calcule $\displaystyle\int \frac{3dx}{x^2-4x+1}$.

Solução. Seja $x^2-4x+1 = x^2-4x+(4-4)+1 = (x-3)^2-3$, segue então que,

$$\int \frac{3dx}{x^2-4x+1} = 3\int \frac{dx}{(x-2)^2-3}.$$

Efetuando-se a substituição $u = x-2$, tem-se, $du = dx$.

Portanto,

$$3\int \frac{dx}{(x-2)^2-3} = 3\int \frac{du}{(u^2-3)} = 3\int \frac{du}{u^2-(\sqrt{3})^2}.$$

Assim sendo, aplicando-se a tabela de integrais e voltando-se a variável original, o resultado é dado por;

$$\int \frac{3dx}{x^2-4x+1} = = 3\ln\left|\frac{u+\sqrt{3}}{u-\sqrt{3}}\right| + c = 3\ln\left|\frac{(x-2)+\sqrt{3}}{(x-2)-\sqrt{3}}\right| + c.$$

(19) Determine o valor de $\displaystyle\int (e^{ax}+e^{-ax})^2dx$.

Solução. Observe que,

$$\int (e^{ax}+e^{-ax})^2dx = \int (e^{2ax}+2e^{-ax}e^{ax}+2e^{-2ax})^2dx = \int e^{2ax}dx + \int 2dx + \int e^{-2ax}dx.$$

Efetuando-se a substituição, $u = 2ax \Rightarrow du = 2adx \Rightarrow \dfrac{du}{2a} = dx$, segue que, a primeira, segunda e terceira integrais, podem ser escritas, respectivamente, como;

$$\frac{1}{2a}\int e^u du, \quad 2\int dx \quad \text{e} \quad \frac{1}{2a}\int e^{-u}du.$$

Portanto, o resultado é dado por,

$$\int (e^{ax}+e^{-ax})^2dx = \left(\frac{1}{2a}e^{2ax} + 2x - \frac{1}{2a}e^{-2ax}\right) + c.$$

(20) Determine o valor de $\displaystyle\int 2x^2\sqrt{6x^3+1}dx$.

Solução. Considere a substituição

$$u = 6x^3+1 \Longrightarrow du = 18x^2dx \Longrightarrow \frac{du}{9} = 2x^2dx.$$

Portanto,

$$\int 2x^2\sqrt{6x^3+1}dx = \frac{1}{9}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{9}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{9}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{27}u^{\frac{3}{2}} + c\,.$$

O resultado é dado por

$$\int 2x^2\sqrt{6x^3+1}dx = \frac{2}{27}\left(6x^3+1\right)^{\frac{3}{2}} + c\,.$$

(21) Calcule o valor de $\displaystyle\int \frac{\cos x}{3 - sen\,x}dx\,.$

Solução. Efetuando-se a substituição,

$$u = sen\,x \Longrightarrow du = \cos x dx\,,$$

segue que

$$\int \frac{\cos x}{3 - sen\,x}dx = \int \frac{du}{3-u}\,.$$

Mas, substituindo-se

$$v = 3 - u \Longrightarrow dv = -du\,.$$

O resultado pode ser escrito como

$$\int \frac{\cos x}{3 - sen\,x}dx = \int \frac{du}{3-u} = -\int \frac{dv}{v} = -\ln v + c = -\ln(3-u) + c = -\ln(3 - sen\,x) + c\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{\cos x}{3 - sen\,x}dx = \ln(3 - sen\,x)^{-1} + c\,.$$

(22) Determine o valor de $\displaystyle\int \frac{\text{arc}sen\,\theta}{2\sqrt{1-\theta^2}}d\theta\,.$

Solução. Neste caso, considere a substituição,

$$u = \text{arc}sen\,\theta \Longrightarrow du = \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{\text{arc}sen\,\theta}{2\sqrt{1-\theta^2}}d\theta = \frac{1}{2}\int u du = \frac{1}{2}\frac{u^2}{2} + c = \frac{(\text{arc}sen\,\theta)^2}{4} + c\,.$$

(23) Encontre o valor de $\displaystyle\int \frac{2sen\, x - 5\cos x}{\cos x}dx\,.$

Solução. Observe o seguinte,

$$\int \frac{2sen\, x - 5\cos x}{\cos x}dx = 2\int \frac{sen\, x}{\cos x}dx - 5\int \frac{\cos x}{\cos x}dx = 2\int \frac{sen\, x}{\cos x}dx - 5\int dx\,.$$

A solução da primeira integral é obtida mediante a substituição

$u = \cos x \Longrightarrow du = -sen\, x dx\,,$ ou seja,

$$\int \frac{sen\, x}{\cos x}dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln u = -\ln(\cos x)\,.$$

Assim sendo

$$\int \frac{2sen\, x - 5\cos x}{\cos x}dx = 2\int \frac{sen\, x}{\cos x}dx - 5\int dx = -2\ln(\cos x) - 5x + c\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{2sen\, x - 5\cos x}{\cos x}dx = -2\ln(\cos x) - 5x + c = 2\ln(sec\, x) - 5x + c\,.$$

(24) Determine o valor de $\displaystyle\int \frac{5\, dx}{x\ln^2 5x}\,.$

Solução. Efetuando-se a substituição,

$$u = \ln 5x \Longrightarrow du = \frac{5}{5x}dx = \frac{dx}{x}\,,$$

tem-se

$$\int \frac{5\, dx}{x\ln^2 5x} = 5\int \frac{dx}{x\ln^2 5x} = 5\int \frac{du}{u^2} = 5\int u^{-2}du = 5\frac{u^{-1}}{-1} + c\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{5\, dx}{x\ln^2 5x} = -\frac{5}{\ln 5x} + c\,.$$

(25) Determine o valor de $\displaystyle\int \frac{x}{2}\cos x^2 dx\,.$

Solução. Considere a substituição,

$$u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \Longrightarrow \frac{du}{4} = \frac{x}{2}dx\,,$$

tem-se

$$\int \frac{x}{2}\cos x^2 dx = \int \cos u\,\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int \cos u du = \frac{1}{4}senu + c\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{x}{2}\cos x^2 dx = \frac{sen\, x^2}{4} + c\ .$$

(26) Determine o valor de $\displaystyle\int \frac{sen\, x}{\cos^{\frac{3}{5}} x} dx\,.$

Solução. Efetuando-se a substituição,

$$u = \cos x \Longrightarrow du = -sen\, x\, dx$$

tem-se

$$\int \frac{sen\, x}{\cos^{\frac{3}{5}} x} dx = -\int \frac{du}{u^{\frac{3}{5}}} = -\int u^{-\frac{3}{5}} du = -\frac{u^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}} + c = -\frac{5(\cos x)^{\frac{2}{5}}}{2} + c\,.$$

(27) Calcule o valor de $\displaystyle\int (x^4 - 1)^{\frac{1}{5}}\, x^3 dx\,.$

Solução. Considere

$$u = x^4 - 1 \Longrightarrow du = 4x^3 dx \Longrightarrow \frac{du}{4} = x^3 dx\,,$$

logo,

$$\int (x^4 - 1)^{\frac{1}{5}}\, x^3 dx = \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{5}} du = \frac{1}{4}\frac{u^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}} + c = \frac{5}{24}(x^4 - 1)^{\frac{6}{5}} + c\,.$$

Portanto,

$$\int (x^4 - 1)^{\frac{1}{5}}\, x^3 dx = \frac{5}{24}(x^4 - 1)^{\frac{6}{5}} + c\,.$$

(28) Calcule o valor de $\displaystyle\int \sqrt{2x-3}\, dx\,.$

Solução. Com efeito, seja

$$u = 2x - 3 \Longrightarrow du = 2dx \Longrightarrow \frac{du}{2} = dx\,,$$

então

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x-3}\, dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{2}{6}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}} + c\,.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int \sqrt{2x-3}dx = \frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}} + c\,.$$

(29) Determine o valor de $\displaystyle\int sen^{\frac{3}{2}} 2\theta \cos 2\theta d\theta\,.$

Solução. Efetuando-se a substituição,

$$u = sen\, 2\theta \Longrightarrow du = 2\cos 2\theta d\theta \Longrightarrow \frac{du}{2} = \cos 2\theta d\theta\,,$$

tem-se

$$\int sen^{\frac{3}{2}} 2\theta \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}} du = \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{1}{5}(sen\, 2\theta)^{\frac{5}{2}} + c\,.$$

Portanto,

$$\int sen^{\frac{3}{2}} 2\theta \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{5}\, sen^{\frac{5}{2}}\, 2\theta\, + c\,.$$

(30) Calcule o valor de $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int \frac{dx}{x\ln x}\right).$

Solução. A solução da integral é dada efetuando-se a substituição

$$u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{dx}{x}\,,$$

segue que,

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln[\ln x] + c\,.$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}\left(\int \frac{dx}{x\ln x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\ln[\ln x] + c\right)\,.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dx}\left(\ln[\ln x] + c\right) = \left(\ln[\ln x] + c\right)' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}\,.$$

Deixa-se ao leitor a análise deste problema, no que se refere a primitiva de uma função.

6.2 Método de Integração por Partes

Sejam f e g funções deriváveis no intervalo I. Segue que,

$$[f(x)g(x)]' = f'(x).g(x) + g'(x)f(x)$$

ou seja,

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - g(x)f'(x)\,.$$

Integrando-se ambos os lados dessa equação, tem-se

$$\int f(x)g'(x)dx = \int [f(x)g(x)]'\,dx - \int g(x)f'(x)dx\,.$$

ou ainda,

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx\,.$$

Observa-se que na expressão acima deixa-se de escrever a constante de integração, já que no decorrer do desenvolvimento aparecerão outras. Todas elas podem ser representadas por uma única constante c, que será introduzida ao final do processo. Generalizando a ideia, considere $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis, então

$$u = f(x) \Longrightarrow du = f'(x)dx \qquad \text{e} \qquad v = g(x) \Longrightarrow dv = g'(x)dx\,.$$

Portanto,

$$\int udv = uv - \int vdu\,,$$

que é a conhecida fórmula de integração por partes.

6.2.1 Exercícios Resolvidos: Método de Integração por Partes

(1) Calcule o valor de $\displaystyle\int lnxdx\,.$

Solução. Escolhendo-se $u = lnx$ então $dv = dx$. A partir desta escolha, obtém-se

$$du = \frac{1}{x}dx \quad \text{e} \quad dv = dx \quad \text{isto é} \quad \int dv = \int dx \quad \text{ou seja} \quad v = x\,.$$

Portanto, substituindo-se os resultados na expressão,

$$\int udv = u.v - \int vdu\,,$$

tem-se

$$\int lnxdx = xlnx - \int dx = xlnx - x + c\,.$$

(2) Determine o valor de $\displaystyle\int xe^{-2x}dx\,.$

Solução. Sejam $u = x$ e $dv = e^{-2x}dx$.

Então,

$$dv = e^{-2x}dx \implies v = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \quad \text{e} \quad du = dx\,.$$

Portanto, substituindo-se os resultados na expressão,

$$\int udv = uv - \int vdu\,,$$

tem-se

$$\int xe^{-2x}dx = -x\left(\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + \int \left(\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx\,.$$

Portanto,

$$\int xe^{-2x}dx = \frac{-xe^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = \frac{-xe^{-2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c\,.$$

(3) Calcule o valor de $\displaystyle\int x^2 \text{sen}x dx\,.$

Solução. Considere a escolha $u = x^2$ e $dv = \text{sen}xdx$.

Então, segue que

$$du = 2xdx \quad \text{e} \quad dv = \int \text{sen}xdx \;\Rightarrow\; v = -\cos x\,.$$

Portanto,

$$\int x^2\text{sen}xdx = -x^2\cos x + 2\int x\cos xdx\,, \tag{6.1}$$

a solução final depende da resolução da integral $\displaystyle\int 2x\cos xdx$.

Com efeito, sejam $u = 2x, \Rightarrow du = 2dx$ e $dv = \cos xdx \Rightarrow v = \text{sen}x$.

Então, colocando estes resultados, mais uma vez, na expressão,

$$\int udv = uv - \int vdu\,,$$

segue que,

$$\int 2x\cos x dx = 2x\text{sen}x - 2\int \text{sen}x dx = 2x\text{sen}x + 2\cos x + c\,. \tag{6.2}$$

Logo, substituindo-se (6.2) em (6.1) , tem-se

$$\int x^2\text{sen}x dx = -x^2\cos x + 2x\text{sen}x + 2\cos x + c\,.$$

(4) Encontre o valor $\displaystyle\int e^{ax}\text{sen}x dx\,.$

Solução. Considere a substituição $u = e^{ax}$ e $dv = \text{sen}x dx\,.$
Então

$$du = ae^{ax}dx \quad \text{e} \quad dv = \text{sen}x dx\,, \quad \text{portanto} \quad v = -\cos x\,.$$

Portanto, substituindo-se estes resultados na expressão

$$\int u dv = uv - \int v du\,,$$

tem-se

$$\int e^{ax}\text{sen}x dx = -e^{ax}\cos x + a\int e^{ax}\cos x dx\,. \tag{6.3}$$

Para obter o resultado final é preciso ainda encontrar a solução da integral

$$\int e^{ax}\cos x dx\,.$$

Com efeito, sejam $u = e^{ax}$ e $dv = \cos x dx$, então, segue que,

$$du = ae^{ax}dx \quad \text{e} \quad v = \text{sen}x\,.$$

Aplicando-se mais uma vez o método da integração por partes, tem-se

$$\int e^{ax}\cos x dx = e^{ax}\text{sen}x - a\int e^{ax}\text{sen}x dx\,. \tag{6.4}$$

Substituindo-se (6.4) em (6.3), o resultado pode ser escrito como;

$$\int e^{ax}\text{sen}x dx = e^{ax}(a\text{sen}x - \cos x) - a^2\int e^{ax}\text{sen}x dx\,.$$

Portanto,

$$\int e^{ax}\text{sen}x dx + a^2 \int e^{ax}\text{sen}x dx = e^{ax}(a\text{sen}x - \cos x)$$

isto é,

$$(1+a^2)\int e^{ax}\text{sen}x dx = e^{ax}(a\text{sen}x - \cos x)\,.$$

Assim sendo,

$$\int e^{ax}\text{sen}x dx = \frac{[e^{ax}(a\text{sen}x - \cos x)]}{(1+a^2)} + c\,.$$

(5) Encontre o valor de $\displaystyle\int \frac{ln(ax+b)}{\sqrt{ax+b}}dx\,.$

Solução. Considere

$$u = ln(ax+b) \Rightarrow du = \frac{a}{(ax+b)} \quad \text{e} \quad dv = \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} \Rightarrow v = \frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Substituindo-se estes resultados na expressão

$$\int u dv = uv - \int v du\,,$$

tem-se

$$\int \frac{ln(ax+b)}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2(ax+b)^{\frac{3}{2}}ln(ax+b)}{3a} - \int \frac{2a(ax+b)^{\frac{3}{2}}}{3a(ax+b)}dx\,.$$

Logo,

$$\int \frac{ln(ax+b)}{\sqrt{ax+b}}dx = = \frac{2(ax+b)^{\frac{3}{2}}ln(ax+b)}{3a} - \frac{2}{3}\int (ax+b)^{\frac{1}{2}}dx\,. \tag{6.5}$$

A solução da integral

$$\int (ax+b)^{\frac{1}{2}}dx\,,$$

é dada mediante a utilização da substituição

$$u = (ax+b) \Rightarrow du = adx\,,$$

assim sendo,

$$\int (ax+b)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{a}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Logo, substituindo-se este resultado na expressão (6.5), obtém-se

$$\int \frac{ln(ax+b)}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2(ax+b)^{\frac{3}{2}}ln(ax+b)}{3a} - \frac{4}{9a}(ax+b)^{\frac{3}{2}} + c\,.$$

(6) Calcule o valor de $\displaystyle\int \cos(lnx)dx$.

Solução. Sejam

$$u = \cos(lnx) \Rightarrow du = -\frac{1}{x}\text{sen}(lnx)dx \quad \text{e} \quad dv = dx \Rightarrow v = x\,.$$

Substituindo-se estes resultados na expressão

$$\int udv = uv - \int vdu\,,$$

tem-se

$$\int \cos(lnx)dx = x\cos(lnx) + \int \left(\frac{x}{x}\right)\text{sen}(lnx)dx = x\cos(lnx) + \int \text{sen}(lnx)dx\,. \quad (6.6)$$

Usando o método de integração por partes para resolver a integral

$$\int \text{sen}(lnx)dx\,,$$

mediante a substituição,

$$u = \text{sen}(lnx) \Rightarrow du = \frac{1}{x}\cos(lnx)dx \quad \text{e} \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

obtém-se,

$$\int \text{sen}(lnx)dx = x\text{sen}(lnx) - \int x.\frac{1}{x}\cos(lnx)dx = x\text{sen}(lnx) - \int \cos(lnx)dx\,.$$

Substituindo-se este resultado na expressão (6.6), segue que

$$\int \cos(lnx)dx = x\left[\cos(lnx) + \text{sen}(lnx)\right] - \int \cos(lnx)dx\,.$$

Portanto, o resultado é dado por

$$\int \cos(lnx)dx = \frac{x\left[\cos(lnx) + \text{sen}(lnx)\right]}{2} + c\,.$$

(7) Determine $\displaystyle\int x\,\text{arc tg}(x)dx$.

Solução. Considere

$$u = \text{arc tg}(x) \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{e} \quad dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}\,.$$

Substituindo-se estes resultados na expressão

$$\int udv = uv - \int vdu\,,$$

tem-se

$$\int x\,\text{arc }\ \text{tg}(x)dx = \frac{x^2\text{arc}\,\text{tg}(x)}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{(1+x^2)}dx\,. \tag{6.7}$$

A solução da integral

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx\,,$$

é dada por,

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{(x^2+1-1)}{1+x^2}dx = \int \frac{(x^2+1)dx}{1+x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2}\,,$$

logo,

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \text{arc}\,\text{tg}\,x\,.$$

Substituindo-se estes resultados na expressão (6.7), o resultado é dado por

$$\int x\,\text{arc}\,\text{tg}\,x dx = \frac{x^2\text{arc}\,\text{tg}\,x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\text{arc}\,\text{tg}\,x}{2} + c\,.$$

(8) Encontre o valor $\displaystyle\int \sqrt{x}\,lnxdx\,.$

Solução. Sejam

$$u = lnx \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{x}dx \quad \text{e} \quad dv = \sqrt{x}dx \;\Rightarrow\; v = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\,.$$

Utilizando-se o método da integração por partes, tem-se

$$\int \sqrt{x}\ \ln x dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\ln x - \int \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}.\frac{1}{x}dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}\,lnx}{3} - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx\,. \tag{6.8}$$

Como

$$\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\,. \tag{6.9}$$

O resultado depois da substituição da expressão (6.9) em (6.8) é dado por,

$$\int \sqrt{x}\,lnxdx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left[lnx - \frac{2}{3}\right] + c\,.$$

(9) Determine $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\, dx\,.$

Solução. Considere a integral escrita da seguinte forma;

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\, dx = \int \frac{1}{x}\,\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx,$$

efetuando-se as substituições

$$u = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; du = \frac{-1}{x^2}dx \quad \text{e} \quad dv = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx \;\Rightarrow\; v = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx\,.$$

Para que seja possível aplicar o método da integração por parte é necessário obter a solução da integral

$$v = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx\,.$$

A solução da integral $\displaystyle v = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$ é dada utilizando-se a seguinte substituição;

$$z = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; dz = \frac{-1}{x^2}dx\,.$$

Isto é,

$$v = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx = -\int e^z\, dz = -e^z = -e^{\frac{1}{x}}\,.$$

Portanto, aplicando-se o método da integração por partes,

$$\int udv = uv - \int vdu\,,$$

tem-se

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\, dx = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - \int \left(-e^{\frac{1}{x}}\right)\frac{-1}{x^2}dx = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - \int \frac{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}{x^2}dx$$

Assim sendo,

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\, dx = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} + e^{\frac{1}{x}} + c = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + c\,.$$

(10) Calcule o valor $\displaystyle\int \ln^2(2x)\, dx\,.$

Solução. Considere

$$u = \ln^2(2x)dx \;\Rightarrow\; du = 2\ln(2x).\frac{2}{2x}dx = \frac{2\ln(2x)}{x}dx \quad \text{e} \quad dv = dx \;\Rightarrow\; v = x\,.$$

Aplicando-se o método da integração por parte;

$$\int udv = uv - \int vdu\,,$$

segue que

$$\int \ln^2(2x)\,dx = x\,\ln^2(2x) - \int x\frac{2\ln(2x)}{x}dx = x\,\ln^2(2x) - 2\int \ln(2x)dx\,. \tag{6.10}$$

Resolvendo-se $\int \ln(2x)dx$, com a substituição

$$z = 2x \Rightarrow dz = 2dx$$

é fácil ver que o resultado é dado por

$$\int \ln(2x)dx = \frac{1}{2}\int \ln(z)dz = \frac{1}{2}\left(z\ln(z) - z\right) = \frac{1}{2}\left(2x\ln(2x) - 2x\right) = x\ln(2x) - x\,.$$

Substituindo-se este resultado em (6.10), tem-se

$$\int \ln^2(2x)\,dx = x\,\ln^2(2x) - 2\int \ln(2x)dx = x\,\ln^2(2x) - 2\left(x\ln(2x) - x\right) + c\,.$$

Portanto,

$$\int \ln^2(2x)\,dx = x\left[\ln^2(2x) - 2\left(\ln(2x) - 1\right)\right] + c\,.$$

Deixa-se ao leitor a tarefa de derivar a função

$$F(x) = x\left[\ln^2(2x) - 2\left(\ln(2x) - 1\right)\right] + c$$

e comparar com $f(x) = \ln^2(2x)$.

(11) Determine $\int te^{4t}dt\,.$

Solução. Considere as substituições

$$u = t \Longrightarrow du = dt \quad \text{e} \quad dv = e^{4t}dt \Longrightarrow v = \int e^{4t}dt = \frac{e^{4t}}{4}\,.$$

Portanto, aplicando-se o método da integração por partes,

$$\int udv = uv - \int vdu\,,$$

segue que

$$\int te^{4t}dt = \int udv = uv - \int vdu = t\frac{e^{4t}}{4} - \int \frac{e^{4t}}{4}dt\,.$$

Assim sendo,

$$\int te^{4t}dt = t\frac{e^{4t}}{4} - \int \frac{e^{4t}}{4}dt = \frac{te^{4t}}{4} - \frac{e^{4t}}{16} + c = \frac{e^{4t}}{4}\left(t - \frac{1}{4}\right) + c\,.$$

(12) Calcule $\displaystyle\int \ln(1-x)dx\,.$

Solução. Efetuando-se as substituições

$$u = \ln(1-x) \Longrightarrow du = -\frac{dx}{(1-x)} \quad \text{e} \quad dv = dx \Longrightarrow v = x\,.$$

Aplicando-se o método da integração por partes,

$$\int udv = uv - \int vdu\,,$$

segue que

$$\begin{aligned} \int \ln(1-x)dx &= \int udv = uv - \int vdu = x\ln(1-x) + \int \frac{xdx}{(1-x)} \\ &= x\ln(1-x) - \int \frac{xdx}{(x-1)}\,. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Somando-se e subtraindo-se 1 ao numerador do integrando da segunda integral, tem-se,

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{(x-1)} &= \int \frac{(1-1+x)dx}{x-1} = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{(x-1)dx}{(x-1)} \\ &= \ln(x-1) + \int dx = \ln(x-1) + x\,. \end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima em (6.11), o resultado final é dado por

$$\int \ln(1-x)dx = x\ln(1-x) - \ln(x-1) - x + c\,.$$

(13) Calcule $\displaystyle\int x^2e^x dx\,.$

Solução. Sejam

$$u = x^2 \Longrightarrow du = 2xdx \quad \text{e} \quad dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x\,.$$

Portanto, aplicando-se o método da integração por partes,

$$\int udv = uv - \int vdu\,,$$

segue que

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx\,. \qquad (6.12)$$

Para encontrar a solução da integral de (6.12) aplica-se mais uma vez a integração por parte, isto é, efetuando-se as substituições;

$$u = 2x \Longrightarrow du = 2dx \quad \text{e} \quad dv = e^x dx \Longrightarrow v = e^x$$

tem-se

$$\int 2xe^x dx = 2xe^x - 2\int e^x dx = 2xe^x - 2e^x\,. \qquad (6.13)$$

Portanto, substituindo (6.13) em (6.12) e acrescentando-se a constante, o resultado é dado por,

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - (2xe^x - 2e^x) + c = e^x(x^2 - 2x + 2) + c\,.$$

(14) Calcule $\displaystyle\int arc\,cotg 2x dx\,.$

Solução. Considere as substituições

$$u = arc\,cotg\,2x \Longrightarrow du = -\frac{2dx}{1+(2x)^2} \quad \text{e} \quad dv = dx \Longrightarrow v = x\,.$$

Portanto, aplicando-se o método da integração por partes,

$$\int udv = uv - \int vdu\,,$$

tem-se

$$\int arc\,cotg 2x dx = x\,arc\,cotg\,2x + \int \frac{2xdx}{1+(2x)^2} = x\,arc\,cotg\,2x + \int \frac{2xdx}{(1+4x^2)}\,. \qquad (6.14)$$

Para resolver a integral de (6.14), efetua-se a substituição

$$t = 1 + 4x^2 \Longrightarrow dt = 8xdx \Longrightarrow \frac{dt}{4} = 2xdx\,,$$

assim sendo,

$$\int \frac{2xdx}{(1+4x^2)} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln t = \frac{\ln(1+4x^2)}{4}\,. \qquad (6.15)$$

Finalmente, substituindo-se (6.15) em (6.14), o resultado é dado por,

$$\int arc\,cotg 2x dx = x\,arc\,cotg\,2x + \frac{\ln(1+4x^2)}{4} + c\,.$$

(15) Encontre $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}dx\,.$

Solução. Sejam as substituições

$$u = x \Longrightarrow du = dx \quad \text{e} \quad dv = \sqrt{x+1}dx \Longrightarrow v = \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}\,,$$

tem-se

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2x\,\sqrt{(x+1)^3}}{3} - \int \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}\,dx\,. \tag{6.16}$$

Para encontrar a solução da integral apresentada por (6.16), efetua-se a mudança de variável,

$$t = x+1 \Longrightarrow dt = dt\,,$$

logo,

$$\int \frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3}\,dx = \frac{2}{3}\int \sqrt{(x+1)^3}dx = \frac{2}{3}\int t^{\frac{3}{2}}dt = \frac{2}{3}\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}}\,.$$

Substituindo-se a expressão acima em (6.16), o resultado é dado por

$$\int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2x\,\sqrt{(x+1)^3}}{3} - \frac{4\sqrt{(x+1)^5}}{15} + c\,.$$

6.3 Método das Frações Parciais

Caso I. Considere que os fatores do polinômio $Q(x)$ sejam lineares e distintos. Isto é, que seja possível escrever $Q(x)$ na forma

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n),$$

onde os a_i, $(i = 1, ..., n)$, são distintos dois a dois. A decomposição da função racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ em frações mais simples é dada por

$$f(x) = \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_2)} + \dots \frac{A_n}{(x - a_x)} \ ,$$

onde A_1 , A_2 ... A_n são constantes a determinar no processo para obter uma expressão equivalente.

Caso II. Os fatores de $Q(x)$ são lineares sendo que alguns deles se repetem. Ou seja, se um fator linear $(x - a_i)$ de $Q(x)$ tem multiplicidade r a este fator corresponderá uma soma de frações parciais da tipo

$$\frac{B_1}{(x - a_i)^r} + \frac{B_2}{(x - a_i)^{r-1}} + \dots + \frac{B_r}{(x - a_i)} \ ,$$

onde B_1 B_2, ... B_r são constantes que devem ser determinadas.

Caso III. Os fatores de $Q(x)$ são lineares e quadráticos irredutíveis, sendo que os fatores quadráticos não se repetem.

A cada fator quadrático $(x^2 + bx + c)$ de $Q(x)$, corresponderá uma fração parcial

$$\frac{Cx + D}{(x^2 + bx + c)} \ .$$

Caso IV. Os fatores de $Q(x)$ são lineares e quadráticos irredutíveis sendo que alguns dos fatores quadráticos se repetem. Se um fator quadrático (x^2+bx+c) de $Q(x)$ tem multiplicidade s, a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma

$$\frac{(C_1x + D_1)}{(x^2 + bx + c)^s} + \frac{(C_2x + D_2)}{(x^2 + bx + c)^{s-1}} + \dots + \frac{(C_sx + D_s)}{(x^2 + bx + c)} \ .$$

6.3.1 Exercícios Resolvidos: Método das Frações Parciais

(1) Determine o valor de $\displaystyle\int \frac{4dx}{x^2+x}$.

Solução. Busca-se coeficientes que permitam a separação do integrando numa soma de parcelas. Este procedimento deverá facilitar a obtenção do resultado da integral. Com efeito, busca-se, na verdade o seguinte;

$$\frac{4}{x^2+x} = \frac{4}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}.$$

Assim sendo

$$\int \frac{4dx}{x^2+x} = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{(x+1)}dx.$$

Portanto, usando-se a identidade de polinômios, segue que

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=4 \Rightarrow B=-4 \end{cases}$$

Logo,

$$\int \frac{4dx}{x^2+x} = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{B}{x+1}dx = 4\int \frac{dx}{x} - 4\int \frac{dx}{x+1} = 4\ln|x| - 4\ln|x+1| + c.$$

Assim sendo;

$$\int \frac{4dx}{x^2+x} = 4\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c.$$

(2) Calcule o valor $\displaystyle\int \frac{2dx}{x^4-4x^2}$.

Solução. Como a equação $x^4-4x^2 = x^2(x^2-4) = 0$ possui raízes com multiplicidade (isto é, $x=0$ é raiz dupla). Então, neste caso, a solução é obtida utilizando-se;

$$\int \frac{2dx}{x^4-4x^2} = \int \frac{2dx}{x^2(x^2-4)} = \int \frac{Adx}{x^2} + \int \frac{Bdx}{x} + \int \frac{Cdx}{x-2} + \int \frac{Ddx}{x+2}. \quad (6.17)$$

Efetuando-se algumas manipulações algébricas junto aos integrandos, tem-se

$$\frac{2}{x^4-4x^2} = \frac{A(x^2-4)+Bx(x^2-4)+Cx^2(x+2)+Dx^2(x-2)}{x^2(x^2-4)}.$$

Portanto, agrupando-se os termos e usando-se a identidade polinomial entre os numeradores das duas frações, segue que

$$2 = Ax^2 - 4A + Bx^3 - 4Bx + Cx^3 + 2Cx + Dx^3 - 2Dx^2.$$

Ou seja,

$$2 = (B + C + D)x^3 + (A + 2C - 2D)x^2 - 4Bx - 4A\,.$$

A solução do sistema

$$\begin{cases} -4A = 2 \\ B + C + D = 0 \\ A + 2C - 2D = 0 \\ -4B = 0 \end{cases}$$

é dada por

$$A = -\frac{1}{2}, \quad B = 0, \quad C = \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad D = -\frac{1}{8}\,.$$

Substituindo-se estes valores na expressão (6.17), tem-se

$$\int \frac{2dx}{x^2(x^2-4)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2} + 0\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+2}\,.$$

Resolvendo-se cada uma das integrais, o resultado é dado por

$$\int \frac{2dx}{x^2(x^2-4)} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{8}\ln|x-2| - \frac{1}{8}\ln|x+2| + c\,.$$

Portanto,

$$\int \frac{2dx}{x^2(x^2-4)} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + c\,.$$

(3) Determine o valor de $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+9x}\,.$

Solução. Observe que

$$\int \frac{dx}{x^3+9x} = \int \frac{dx}{x(x^2+9)} = \int \frac{Adx}{x} + \int \frac{(Bx+C)dx}{(x^2+9)}\,. \tag{6.18}$$

Neste caso, tem-se o polinômio $x^2 + 9 = 0$ irredutível (em $\mathbb{R}$) então a regra de decomposição é dada por

$$\frac{1}{x(x^2+9)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+9)} = \frac{A(x^2+9)+(Bx+C)x}{x(x^2+9)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+9A}{x(x^2+9)}\,.$$

Portanto, agrupando-se os termos e usando-se a identidade polinomial entre os numeradores das duas frações, tem-se

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ 9A = 1\ , \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$A = \frac{1}{9}, \quad B = -\frac{1}{9} \quad \text{e} \quad C = 0\,.$$

Substituindo-se estes valores na expressão (6.18), obtém-se

$$\int \frac{dx}{x^3 + 9x} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{9}\int \frac{xdx}{x^2+9} \qquad (A)\,.$$

A integral

$$\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{9}\ln|x| \qquad (I)\,.$$

A solução da integral $-\dfrac{1}{9}\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+9}$ é obtida utilizando-se a substituição

$$u = x^2 + 9 \Longrightarrow du = 2xdx\,.$$

O resultado é dada por

$$-\frac{1}{9}\int \frac{xdx}{x^2+9} = -\frac{1}{18}\ln|x^2+9| \qquad (II)\,.$$

Assim sendo, substituindo-se (I) e (II) em (A), obtém-se

$$\int \frac{dx}{x^3+9x} = \frac{1}{9}\ln|x| - \frac{1}{18}\ln|x^2+9| + c\,.$$

(4) Encontre o valor de $\displaystyle\int \frac{(2x^2+5x+4)dx}{x^3+x^2+x-3}$.

Solução. Como a equação $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ possui uma raiz real $x = 1$ e as demais são raízes complexas (isto é, o polinômio resultante é irredutível, ao dividir-se $(x^3 + x^2 + x - 3)$ por $(x - 1)$ obtém-se $x^2 + 2x + 3$ que é irredutível). Assim sendo,

$$\frac{(2x^2+5x+4)}{x^3+x^2+x-3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+2x+3)}\,,$$

segue então que

$$\int \frac{(2x^2+5x+4)dx}{x^3+x^2+x-3} = \int \frac{Adx}{(x-1)} + \int \frac{(Bx+C)dx}{x^2+2x+3}\,. \tag{6.19}$$

A tarefa agora consiste em obter as constantes $A, B\,\text{e}\,C$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\frac{(2x^2+5x+4)}{x^3+x^2+x-3} &= \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+2x+3)} = \frac{A(x^2+2x+3)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)((x^2+2x+3)} \\
&= \frac{(A+B)x^2+(2A-B+C)x+3A-C}{(x-1)((x^2+2x+3)}
\end{aligned}$$

Portanto, agrupando os termos e usando a identidade polinomial entre os numeradores das duas frações, tem-se

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 2A-B+C=5 \\ 3A-C=4 \end{cases}$$

cuja solução será $A=\dfrac{11}{6}\,,\quad B=\dfrac{1}{6}\quad$ e $\quad C=\dfrac{9}{6}\,.$

A substituição destes valores em (6.19), fornece

$$\int \frac{(2x^2+5x+4)dx}{x^3+x^2+x-3}=\frac{11}{6}\int\frac{dx}{(x-1)}+\frac{1}{6}\int\frac{xdx}{x^2+2x+3}+\frac{9}{6}\int\frac{dx}{x^2+2x+3}\,. \tag{6.20}$$

O objetivo agora consiste em resolver cada uma das integrais de (6.20). A solução da primeira integral é dada por

$$\frac{11}{6}\int\frac{dx}{(x-1)}=\frac{11}{6}\ln(x-1)\qquad (I)\,.$$

Observe que a segunda e a terceira integrais podem ser reescritas da seguinte forma;

$$\frac{1}{6}\int\frac{xdx}{x^2+2x+3}+\frac{9}{6}\int\frac{dx}{x^2+2x+3}=\frac{1}{6}\int\frac{(x+9)dx}{x^2+2x+3}\,.$$

Nossa tarefa agora consiste em obter a solução desta nova integral. Antes disso

$$x^2+2x+3=(x+1)^2+2\,.$$

Assim sendo,

$$\frac{1}{6}\int\frac{(x+9)dx}{x^2+2x+3}=\frac{1}{6}\int\frac{(x+9)dx}{(x+1)^2+2}\,.$$

Efetuando-se a substituição $x+1=t \Longrightarrow dx=dt$ segue que $t-1=x$ e portanto, tem-se

$$\frac{1}{6}\int\frac{(x+9)dx}{(x+1)^2+2}=\frac{1}{6}\int\frac{(t-1+9)dt}{t^2+2}=\frac{1}{6}\int\frac{(t+8)dt}{t^2+2}\,.$$

Logo,

$$\frac{1}{6}\int\frac{(t+8)dt}{t^2+2}=\frac{1}{6}\int\frac{tdt}{t^2+2}+\frac{1}{6}\int\frac{8dt}{t^2+2}\,.$$

Utilizando-se a tabela de integrais as solução são escritas da seguinte forma,

$$\frac{1}{6}\int\frac{tdt}{t^2+2}+\frac{1}{6}\int\frac{8dt}{t^2+2}=\frac{1}{12}\ln(t^2+2)+\frac{8}{6\sqrt{2}}\,arc\,tg\,\frac{t}{\sqrt{2}}\,.$$

Retornando-se a variável x, tem-se

$$\frac{1}{12}\ln(t^2+2)+\frac{8}{6\sqrt{2}}\,arc\,tg\,\frac{t}{\sqrt{2}}=\frac{1}{12}\ln((x+1)^2+2)+\frac{8}{6\sqrt{2}}\,arc\,tg\,\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}\,.$$

Portanto, substituindo-se estes resultados em (6.20), bem como, o resultado (I) segue que

$$\int\frac{(2x^2+5x+4)dx}{x^3+x^2+x-3}=\frac{11}{6}\ln(x-1)+\frac{1}{12}\ln((x+1)^2+2)+\frac{8}{6\sqrt{2}}\,arc\,tg\,\frac{(x+1)}{\sqrt{2}}+c\,.$$

6.4 Método de Substituições Trigonométricas

Lembrete: Identidades Trigonométricas

$$\begin{aligned}
sen^2x \;&+\; \cos^2 x = 1 \qquad (I)\\
sec^2x \;&=\; tg^2x+1 \qquad (II)\\
cosec^2x \;&=\; cotg^2x+1 \qquad (III)\\
\cos^2 x \;&=\; \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \quad \text{e} \quad sen^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad (IV)\\
sen\,a\,\cos b \;&=\; \frac{1}{2}[sen\,(a+b)+sen\,(a-b)] \qquad (A)\\
sen\,a\,sen\,b \;&=\; \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)] \qquad (B)\\
\cos a\,\cos b \;&=\; \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)] \qquad (C)\,.
\end{aligned}$$

6.4.1 Exercícios Resolvidos: Substituições Trigonométricas

Integrais do Tipo $\int \cos^n x\,dx$ **e** $\int sen^n x\,dx$ **.**

As soluções são construídas utilizando-se as identidades (IV) quando n for par e a identidade (I), caso n for ímpar.

(1) Calcule $\int \text{sen}^5 x dx\,.$

Solução. Como $n=5$ é ímpar, então utilizando-se a identidade (I) tem-se $\text{sen}^5x=\text{sen}x(\text{sen}^2x)^2=\text{sen}x(1-\cos^2 x)^2\,,$
ou seja, $\text{sen}^5x=\text{sen}x(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\,.$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int \text{sen}^5 x dx &= \int \text{sen} x(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)dx \\ &= \int \text{sen} x dx - 2\int \text{sen} x \cos^2 x dx + \int \text{sen} x \cos^4 x dx\,. \end{aligned} \tag{6.21}$$

Resolvendo-se cada uma dessas integrais, segue que

(i) $\displaystyle\int \text{sen} x dx = -\cos x\,;$

(ii) $\displaystyle -2\int \text{sen} x \cos^2 x dx\,;$

Considere a substituição $u = \cos x$ então $du = -\text{sen} x dx$, logo,

$$-2\int \text{sen} x \cos^2 x dx = 2\int u^2 du = \frac{2u^3}{3} = \frac{2\cos^3 x}{3}$$

(iii) $\displaystyle\int \text{sen} x \cos^4 x dx\,;$

seja $u = \cos x$ então $du = -\text{sen} x dx$ logo,

$$\int \text{sen} x \cos^4 x dx = -\int u^4 du = -\frac{u^5}{5} = -\frac{\cos^5 x}{5}\,.$$

Portanto, substituindo-se os resultados (i), (ii) e (iii) em (6.21), segue que

$$\int \text{sen}^5 x dx = -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c\,.$$

(2) Determine o valor de $\displaystyle\int \cos^4 x dx\,.$

Solução. Neste caso, $n = 4$ é par. Então utilizando-se a identidade

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2.$$

e desenvolvendo o binômio acima, a integral pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx\,. \tag{6.22}$$

As duas primeiras integrais são imediatas, resta obter o resultado da última integral. Com efeito, substituindo-se a identidade abaixo na ultima parcela da expressão (6.22), tem-se

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}\,.$$

$$\int \frac{1}{4}\cos^2 2x dx = \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx\,,$$

segue então que

$$\frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\text{sen}4x\,.$$

Portanto, resolvendo-se as duas primeiras integrais e introduzindo-se o resultado acima na expressão (6.22), obtém-se

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\text{sen}2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\text{sen}4x + c\,.$$

Assim sendo,

$$\int \cos^4 x dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\text{sen}2x + \frac{1}{32}\text{sen}4x + c\,.$$

Integrais do Tipo $\int \sec^n x\,dx$ **e** $\int cosec^n x\,dx$**.**

As soluções são obtidas mediante o uso das identidades (II) e (III).

(1) Encontre o valor da $\int sec\,x\,dx\,.$

Solução. Neste caso especial, onde $n=1$ a solução desta integral é obtida multiplicando-se o denominador e numerador pela quantidade $(sec\,x + \,tg\,x)$ assim sendo,

$$\int sec\,x\,dx = \int \frac{sec\,x\,(sec\,x + \,tg\,x)}{(sec\,x + \,tg\,x)}dx\,.$$

Efetuando-se a substituição

$$t = (sec\,x + \,tg\,x) \Longrightarrow dt = (sec\,x\,tg\,x + \,sec^2\,x)dx\,.$$

Portanto,

$$\int sec\,x\,dx = \int \frac{sec\,x\,(sec\,x + \,tg\,x)}{(sec\,x + \,tg\,x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c\,.$$

O resultado é dado por,

$$\int sec\,x\,dx = \ln[sec\,x + \,tg\,x] + c\,. \tag{6.23}$$

(2) Encontre o valor da $\int cosec\,x\,dx\,.$

Solução. Para obter a solução desta integral utiliza-se a estratégia de multiplicar o denominador e numerador pela quantidade $(cosec\, x -\ cotg\, x)$ assim sendo,

$$\int cosec\, x\, dx = \int \frac{cosec\, x\, (cosec\, x -\ cotg\, x)}{(cosec\, x -\ cotg\, x)} dx\,.$$

Efetuando-se a substituição

$$t = (cosec\, x -\ cotg\, x) \Longrightarrow dt = (cosec^2\, x - cosec\, x\, cotg\, x\,)dx\,.$$

Portanto,

$$\int cosec\, x\, dx = \int \frac{cosec\, x\, (cosec\, x -\ cotg\, x)}{(cosec\, x -\ cotg\, x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c\,.$$

O resultado é dado por,

$$\int cosec\, x\, dx = \ln[cosec\, x -\ cotg\, x] + c\,.$$

(3) Determine o valor da integral $\int sec^3 x dx$.

Solução. A solução pode ser obtida mediante a utilização do método da integração por partes, antes utilizamos a identidade (II). Senão vejamos,

$$\int sec^3 x dx = \int secx\, sec^2 x dx$$

$u = secx \Longrightarrow du = secxtgxdx$ e $dv = sec^2 x dx \Longrightarrow v = tgx\,.$

Substituindo na fórmula da integração por partes, usando a identidade (II), efetuando algumas manipulações algébricas e utilizando a identidade (6.23) segue que

$$\int sec^3 x dx = tg\, x\, sec^2\, x - \int tg^2\, x\, sec\, x\, dx = tg\, x\, sec^2\, x - \int sec^3\, x\, dx + \int sec\, x\, dx\,.$$

Portanto,

$$\int sec^3 x dx = \frac{1}{2} tg\, x\, sec^2\, x + \frac{1}{2} \ln|sec\, x + tg\, x| + c\,. \tag{6.24}$$

Integrais do Tipo $\int sen^n\, x\, dx$ **e** $\int \cos^n\, x\, dx$**.**

A solução destas integrais é obtida utilizando-se as identidades (IV), caso n seja par e a identidade (I) se n é ímpar.

(1) Ache o valor da $\int \cos^5 x\, dx$.

Solução. Considere

$$\cos^5 x = (\cos^2 x)^2 \cos x = (1 - sen^2\, x)^2 \cos x = \cos x - 2sen^2\, x \cos x + sen^4\, x \cos x\,.$$

Portanto, a integral pode ser escrita da seguinte forma

$$\int \cos^5 x\, dx = \int \cos x dx - 2\int sen^2\, x \cos x dx + \int sen^4\, x\, \cos x\, dx\,. \qquad (6.25)$$

A solução da primeira integral é imediata, isto é,

$$\int \cos x dx = sen\, x \qquad (i)\,.$$

A segunda integral é dado por

$$u = sen\, x \Longrightarrow du = \cos x dx\,,$$

assim sendo,

$$2\int sen^2\, x \cos x dx = 2\int u^2 du = 2\frac{u^3}{3} = \frac{2sen^3\, x}{3} \qquad (ii)\,.$$

Similarmente ao caso anterior, a solução da terceira integral é escrita como

$$\int sen^4\, x\, \cos x\, dx = \frac{sen^5\, x}{5} \qquad (iii)\,.$$

Substituindo-se os resultados (i), (ii) e (iii) em (6.25), segue que

$$\int \cos^5 x\, dx = sen\, x + \frac{2sen^3\, x}{3} + \frac{sen^5\, x}{5} + c\,.$$

(2) Determine o valor de $\int sen^3\, x\, dx$.

Solução. Considere

$$sen^3\, x = sen^2\, x\, sen\, x = (1 - \cos^2 x) sen\, x = sen\, x - sen\, x\, \cos^2 x\,.$$

Portanto, a integral pode ser escrita da seguinte forma

$$\int sen^3 x\, dx = \int sen\, x dx - \int sen\, x \cos^2 x dx\,. \tag{6.26}$$

A primeira integral é imediata, isto é,

$$\int sen\, x dx = -\cos x\,.$$

A segunda integral é dada por

$$u = \cos x \Longrightarrow du = -sen\, x\, dx\,,$$

assim sendo,

$$\int sen\, x \cos^2 x dx = -\int u^2 du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{\cos^3 x}{3}\,.$$

Portanto,

$$\int sen^3 x\, dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c\,.$$

Integrais do Tipo $\int sen^n x \cos^m x\, dx$ **.**

A solução destas integrais é obtida mediante a substituição da identidade (I) caso n ou m sejam ímpares e utiliza-se as identidades, descritas em (IV), caso n e m sejam pares.

(1) Encontre o valor da $\int sen^5 x\, \cos^2 x dx\,.$

Solução. Considere

$$\begin{aligned} sen^5 x\, \cos^2 x &= (sen^2 x)^2 sen\, x\, \cos^2 x = (1 - \cos^2 x)^2 sen\, x\, \cos^2 x \\ &= sen\, x\, \cos^2 x - 2 sen\, x\, \cos^4 x + sen\, x\, \cos^6 x\,. \end{aligned}$$

A integral pode ser escrita da seguinte forma;

$$\int sen^5 x\, \cos^2 x dx = \int sen\, x\, \cos^2 x dx - 2\int sen\, x\, \cos^4 x dx + \int sen\, x\, \cos^6 x dx\,.$$

Para todos os casos acima a substituição será a mesma, isto é,

$$u = \cos x \Longrightarrow du = -sen\, x\, dx\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int sen^5 x \cos^2 x dx &= \int sen\, x \cos^2 x dx - 2\int sen\, x \cos^4 x dx + \int sen\, x \cos^6 x dx \\
&= -\int u^2 du + 2\int u^4 du - \int u^6 du = -\frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c\,.
\end{aligned}$$

Desta forma então

$$\int sen^5 x \cos^2 x dx = -\frac{u^3}{3} + \frac{2u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + c = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c\,.$$

(2) Determine o valor da $\int sen^2 x \cos^4 x dx$.

Solução. Considere as expressões equivalentes abaixo, isto é,

$$\begin{aligned}
sen^2 x \cos^4 x &= sen^2 x (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{8}(1-\cos 2x)\left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(1 + \cos 2x - \frac{(1+\cos 4x)}{2} - (1 - sen^2 2x)\cos 2x\right) \\
&= \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{8} sen^2 2x \cos 2x\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int sen^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx + \frac{1}{8}\int sen^2 2x \cos 2x dx\,.$$

A última integral requer uma substituição do tipo

$$u = sen 2x \Longrightarrow du = 2\cos 2x dx \Longrightarrow \frac{du}{2} = \cos 2x dx\,.$$

Assim sendo,

$$\frac{1}{8}\int sen^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{16}\int u^2 du = \frac{1}{16}\frac{u^3}{3} = \frac{sen^3 2x}{48}\,.$$

Desta forma, o resultado final é dado por

$$\int sen^2 x \cos^4 x dx = \frac{x}{16} - \frac{sen\, 4x}{64} + \frac{sen^3 2x}{48} + c\,.$$

(3) Encontre o valor de $\int sen^4 x \cos^4 x dx$.

Solução. Lembre-se que

$$sen\, x \cos x = \frac{1}{2} sen\, 2x\,.$$

Baseado nesta identidade, considere as expressões equivalentes abaixo, isto é,

$$\begin{aligned}
sen^4 x\, \cos^4 x &= \left(\frac{1}{2} sen\, 2x\right)^4 = \frac{1}{16}[sen^2\, 2x]^2 \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 = \frac{1}{64}[1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x] \\
&= \frac{1}{64}\left(1 - 2\cos 4x + \frac{[1+\cos 8x]}{2}\right) \\
&= \frac{3}{128} - \frac{1}{32}\cos 4x + \frac{1}{128}\cos 8x\,.
\end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\int sen^4 x\, \cos^4 x dx &= \frac{3}{128}\int dx - \frac{1}{32}\int \cos 4x dx + \frac{1}{128}\int \cos 8x dx \\
&= \frac{3}{128}x - \frac{1}{128} sen\, 4x + \frac{1}{1024} sen\, 8x + c\,.
\end{aligned}$$

Integrais do Tipo $\int sen\, mx\, \cos nx\, dx$ **.**

A solução destas integrais é obtida mediante o uso das identidades (A) (B) e (C) .

(1) Determine o valor de $\displaystyle\int sen\, 4\, x\, \cos 2x dx\,.$

Solução. Utilizando-se a identidade (A) acima, segue que

$$sen\, 4\, x\, \cos 2x = \frac{1}{2}(sen\, 6x\, +\, sen\, 2x)\,.$$

Portanto,

$$\int sen\, 4\, x\, \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (sen\, 6x\, +\, sen\, 2x) dx = \frac{1}{2}\int sen\, 6x dx + \frac{1}{2}\int sen\, 2x dx\,.$$

O resultado é dado por,

$$\int sen\, 4\, x\, \cos 2x dx = -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x + c\,.$$

(2) Ache o valor da $\displaystyle\int sen\, 5\, x\, sen\, 2x dx\,.$

Solução. Utilizando-se a identidade (B) acima, segue que

$$sen\,5\,x\,sen\,2x = \frac{1}{2}(\cos 7x - \cos 2x)\,.$$

Portanto,

$$\int sen\,5\,x\,sen\,2xdx = \frac{1}{2}\int \cos 7xdx - \frac{1}{2}\int \cos 2xdx = \frac{1}{4}sen\,2x - \frac{1}{14}sen\,7x\, + c\,.$$

Integrais do Tipo $\int tg^n x\,dx$ **e** $\int cotg^n x\,dx$ **.**

A solução destas integrais é obtida utilizando-se as identidades (II) e (III).

(1) Calcule o valor de $\int tg^3\,x\,dx$.

Solução. Considere

$$tg^3\,x = tg\,x\,tg^2\,x = tg\,x\,(sec^2\,x\, - 1) = tg\,x\,sec^2\,x\, - \,tg\,x\,.$$

Assim sendo,

$$\int tg^3\,x\,dx = \int (tg\,x\,sec^2\,x\, - \,tg\,x)\,dx = \int tg\,x\,sec^2\,x\,dx - \int tg\,xdx\,.$$

A solução da primeira integral é dada da seguinte forma;

$$u = tg\,x \Longrightarrow du = sec^2\,x\,dx\,.$$

Logo,

$$\int tg\,x\,sec^2\,x\,dx = \int udu = \frac{u^2}{2} = \frac{tg^2\,x}{2}\,.$$

Por outro lado,

$$\int tg\,xdx = -\ln|\cos x|\,.$$

Portanto,

$$\int tg^3\,x\,dx = \frac{tg^2\,x}{2} - \ln|\cos x| + c\,.$$

(2) Determine o valor de $\int cotg^4\,x\,dx$.

Solução. Considere

$$\begin{aligned} cotg^4\, x = cotg^2\, x\, cotg^2\, x &= cotg^2\, x\, (cosec^2\, x\ -\ 1) \\ &= cotg^2\, x\, cosec^2\, x -\ cotg^2\, x \\ &= cotg^2\, x\, cosec^2\, x - (cosec^2\, x\ -\ 1) \\ &= cotg^2\, x\, cosec^2\, x - cosec^2\, x\ + 1\,. \end{aligned}$$

Assim sendo, tem-se

$$\int cotg^4\, x\, dx = \int cotg^2\, x\, cosec^2\, x\, dx - \int cosec^2\, x\, dx\ + \int dx\,.$$

A solução da primeira integral é dada por

$$u = cotg\, x \Longrightarrow du = cosec^2\, xdx\,,$$

logo,

$$\int cotg^2\, x\, cosec^2\, x\, dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} = \frac{cotg^3\, x}{3}\,.$$

Por outro lado,

$$\int cosec^2\, x\, dx = -cotg\, x\,.$$

Portanto,

$$\int cotg^4\, x\, dx = \frac{cotg^3\, x}{3} + cotg\, x + x + c\,.$$

Integrais do Tipo $\int tg^n x\, sec^m\, x\, dx$ **e** $\int cotg^n x\, cosec^m\, x\, dx$ **.**

A solução destas integrais é obtida mediante o uso do método da substituição de variável, caso m seja ímpar ou n par. Por outro lado, caso m e n sejam pares o método a ser utilizado é o da integração por partes.

(1) Determine o valor de $\int tg^3\, x\, sec^4\, x\, dx\,.$

Solução. Considere a substituição

$$tg^3\, x\, sec^4\, x = tg^3\, x\, (sec^2\, x) sec^2\, x = tg^3\, x\, (tg^2\, x + 1) sec^2\, x = tg^5\, x\, sec^2\, x\ +\ tg^3\, x\, sec^2\, x\,.$$

Assim sendo,

$$\int tg^3\, x\, sec^4\, x\, dx = \int tg^5\, x\, sec^2\, x\, dx\ +\ \int tg^3\, x\, sec^2\, x\, dx\,.$$

A solução destas integrais é estabelecida mediante a substituição

$$u = tg\, x \Longrightarrow du = sec^2\, x\, dx\,,$$

logo,

$$\int tg^5\, x\, sec^2\, x\, dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} = \frac{tg^6\, x}{6} \quad \text{e} \quad \int tg^3\, x\, sec^2\, x\, dx = \frac{u^4}{4} = \frac{tg^4\, x}{4}\,.$$

Portanto

$$\int tg^3\, x\, sec^4\, x\, dx = \frac{tg^6\, x}{6} + \frac{tg^4\, x}{4} + c\,.$$

(2) Determine o valor de $\int tg^2\, x\, sec^3\, x\, dx\,.$

Solução. Considere a substituição

$$tg^2\, x\, sec^3\, x = (sec^2\, x\, - 1)(sec^3\, x) = sec^5\, x - \, sec^3\, x\,.$$

Assim sendo,

$$\int tg^2\, x\, sec^3\, x\, dx = \int sec^5\, x\, x\, dx\, - \int sec^3\, x\, dx\, = I + II.$$

A solução destas integrais é obtida mediante o uso do método da integração por partes. Senão vejamos, a solução da primeira integral (I) é obtida da seguinte forma:
$u = sec^3\, x$ e $dv = sec^2\, x\, dx \Longrightarrow du = 3sec^2\, x\, tg\, x\, sec\, x$ e $v = tg\, x\,.$

Portanto,

$$\begin{aligned} I = \int sec^5\, x\, dx \quad &= \quad tg\, x\, sec^3\, x - 3\int \, sec^3\, x\, tg^2\, x\, dx \\ &= \quad tg\, x\, sec^3\, x - 3\int sec^5\, x\, dx + 3\int sec^3\, x\, dx\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I = \int sec^5\, x\, dx = \frac{1}{4} tg\, x\, sec^3\, x + \frac{3}{4}\int sec^3\, x\, dx\,.$$

Assim sendo,

$$\int tg^2\, x\, sec^3\, x\, dx = \int sec^5\, x\, x\, dx\, - \int sec^3\, x\, dx\, = \frac{1}{4} tg\, x\, sec^3\, x - \frac{1}{4}\int sec^3\, x\, dx\,.$$

Substituindo o resultado (6.24), tem-se

$$\begin{aligned} \int tg^2\, x\, sec^3\, x\, dx \quad &= \quad \int sec^5\, x\, x\, dx\, - \int sec^3\, x\, dx \\ &= \quad \frac{1}{4} tg\, x\, sec^3\, x - \frac{1}{8} sec^2\, x\, tg\, x - \frac{1}{8}\ln|sec\, x + tg\, x| + c\,. \end{aligned}$$

6.5 Integral Definida

Tudo indica que a integral definida nasceu com a formalização matemática para dar sentido a solução de problemas relacionados as áreas planas. O objetivo desta seção é o de estabelecer o **Teorema Fundamental do Cálculo** e apresentar alguns exemplos de sua aplicação.

Definição. Seja f uma função definida em $[a, b]$ e seja P uma partição de $[a, b]$ isto é, $(P = \{x_0 = a \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_n = b\})$. A integral definida de f de a até b, que denota-se por

$$\int_a^b f(x)dx$$

para ser entendida como sendo,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x_i$$

desde que este limite exista.
Existem inúmeras propriedades associadas as integrais que podem ser consultadas em *Leithold*[1]. A seguir apresenta-se o importante resultado do cálculo diferencial e integral conhecido como o Teorema Fundamental do Cálculo.

6.6 Teorema Fundamental do Cálculo

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e F a sua primitiva em $[a, b]$. Diz-se que F é uma primitiva de f em $[a, b]$ se $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.
Então

$$\int_a^b f(t)dt = F(x)|_a^b = F(a) - F(b).$$

[1]Leithold, L. O Cálculo com Geometria Analítica. Editora Habra.Vol.1.

6.7 Propriedades

(1) Integral da Soma de Funções

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx\,.$$

(2) Integral do Produto de Escalar por uma Função

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \qquad k \in \mathbb{R}\,.$$

(3) Inversão de Limites de Integração

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,.$$

(4) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$ então vale

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx\,.$$

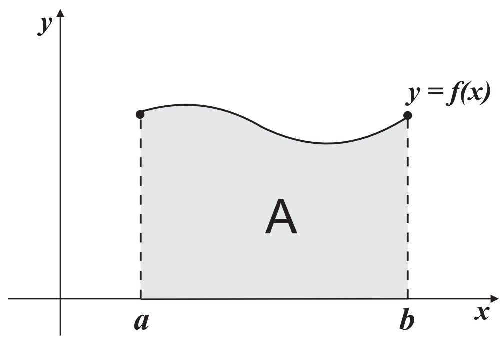
(5) Seja f uma função definida em $[a,b]$, então para $c \in [a,b]$ tem-se

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

6.8 Aplicações da Integral

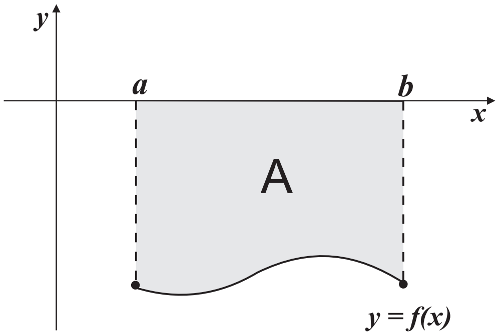
1^{o} **Caso**. Se f é uma função contínua em $[a,b]$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então

$$A = \int_a^b f(x)dx\,.$$



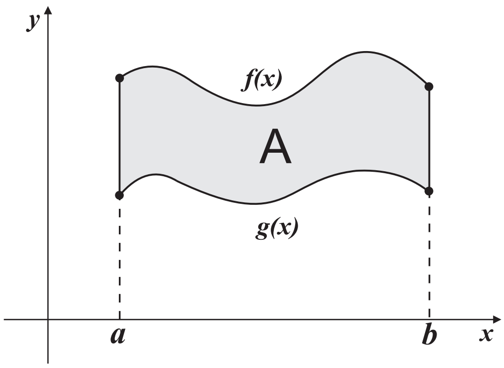
2^{o} **Caso**. Se f é uma função contínua em $[a,b]$ tal que $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a,b]$, então

$$A = \left|\int_a^b f(x)dx\right|\,.$$



3º Caso. Sejam f e g duas funções contínuas em $[a, b]$ tal que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

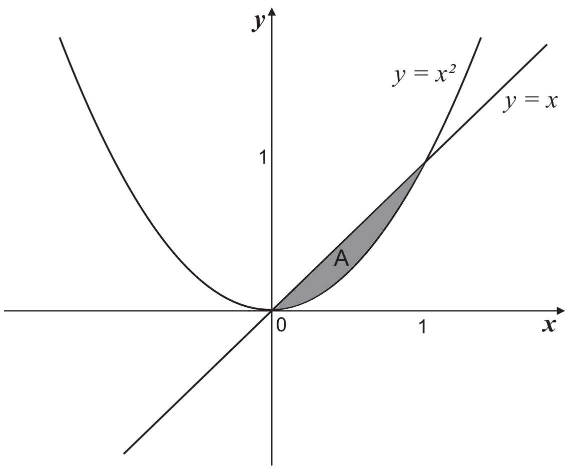
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx \,.$$



6.9 Cálculo de Áreas

(1) Calcule a área compreendida entre as curvas

$$y = x \,, \quad y = x^2 \quad \text{de} \quad x = 0 \quad \text{até} \quad x = 1 \,.$$



Solução. Observando-se o gráfico compreendido entre as cursos, que a função $y = x$ é a linha superior e que $y = x^2$ é a linha inferior compreendida de $x = 0$ até $x = 1$. Neste caso, utilizando-se as conclusões do 3º caso, acima, segue que

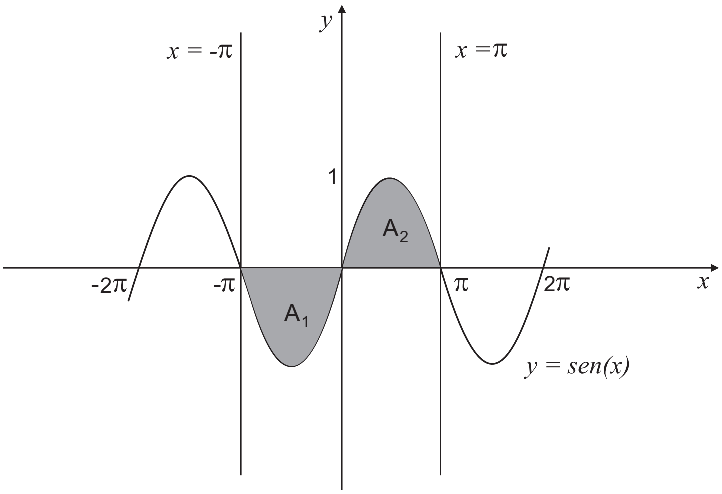
$$A = \int_0^1 (x - x^2)dx = \int_0^1 xdx - \int_0^1 x^2 dx\,.$$

Portanto,

$$A = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{2}(1-0) - (\frac{1}{3} - 0) = \frac{1}{6}\ u.a.$$

(2) Calcule a área compreendida entre as curvas

$$y = \text{sen}x\,, \quad y = 0\,, \quad x = -\pi\,, \quad \text{e} \quad x = \pi\ .$$



Solução. Observando-se o gráfico acima é possível concluir que uma das áreas é negativa. Portanto, neste caso, precisa-se ter o cuidado de tomá-la em módulo. A solução é dada por

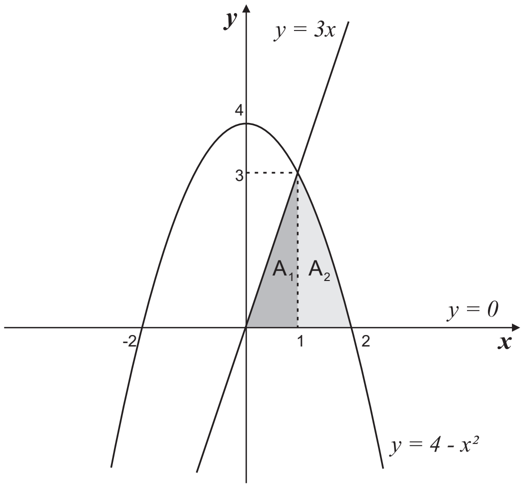
$$\begin{aligned} A = A_1 + A_2 &= \left|\int_{-\pi}^{0} \text{sen}x dx\right| + \int_0^\pi \text{sen}x dx \\ &= [|-\cos x|]_{-\pi}^{0} - [\cos x]_0^\pi = |-1-1| + 1 + 1 \;=\; 4\,u.a. \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$A = 4\,u.a.$$

(3) Calcule a área compreendida entre as curvas

$$y = 3x\,, \quad y = 4 - x^2\,, \quad y = 0 \qquad \text{e} \qquad x \geq 0\,.$$



Solução. Observando-se o gráfico acima da área compreendida entre as curvas, segue que é simples obter o valores limites entre elas;

$$3x = 4 - x^2 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad e \quad x = -4\,.$$

Portanto, a área desejada é dada por

$$A = A_1 + A_2 \quad \text{onde} \quad A_1 = \int_0^1 3x dx \quad \text{e} \quad A_2 = \int_1^2 (4 - x^2) dx\,.$$

Resolvendo-se as integrais, segue que

$$A_1 = \int_0^1 3x dx = \left.\frac{3x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{3}{2}\, u.a.$$

Por outra lado,

$$A_2 = \int_1^2 (4 - x^2) dx = 4x|_1^2 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = (8 - 4) - (\frac{8}{3} - \frac{1}{3}) = 4 - (\frac{7}{3}) = \frac{5}{3}\, u.a.$$

Assim sendo, o resultado é dado por

$$A = (\frac{3}{2}\, u.a. + \frac{5}{3}\, u.a.) = \frac{19}{6}\, u.a.$$

6.10 Exercícios Resolvidos

(1) Determine o valor da integral $\displaystyle\int_1^2 (3x - 2) dx\,.$

Solução. Com efeito, utilizando-se o Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se

$$\begin{aligned}\int_1^2 (3x-2)dx &= 3\int_1^2 xdx - 2\int_1^2 dx = \left.\frac{3x^2}{2}\right|_1^2 - 2x|_1^2 \\ &= \left(\frac{3.4}{2} - \frac{3.1}{2}\right) - (2.2 - 2.1) = \left(\frac{12}{2} - \frac{3}{2}\right) - (4-2) \\ &= \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}\,.\end{aligned}$$

(2) Encontre o valor da integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} sen\, tdt$.

Solução. Com efeito, utilizando-se o Teorema Fundamental do Cálculo, tem-se

$$\int_0^{2\pi} sen\, tdt = -\cos t|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0\,.$$

(3) Determine o valor $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sqrt{t+4}dt\right)$.

Solução. Com efeito, considere $t+4=u$ então $u=4$ quando $t=0$ e $u=x+4$ quando $t=x$. Por outro lado, $dt=du$. Desta forma, tem-se

$$\int_0^x \sqrt{t+4}dt = \int_4^{x+4} \sqrt{u}du = \int_4^{x+4} u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \left.\frac{2\sqrt{(t+4)^3}}{3}\right|_0^x .$$

Isto é,

$$\int_0^x \sqrt{t+4}dt = \left(\frac{2\sqrt{(x+4)^3}}{3} - \frac{2\sqrt{4^3}}{3}\right).$$

Portanto,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sqrt{t+4}dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2\sqrt{(x+4)^3}}{3} - \frac{2\sqrt{4^3}}{3}\right) = \sqrt{x+4}\,.$$

(4) Calcule o valor $\displaystyle\frac{d}{d\theta}\left(\int_1^\theta t\, sen\, t\, dt\right)$.

Solução. A solução da integral indefinida é obtida mediante o uso do método da integração por partes, isto é,

$$u = t \Longrightarrow du = dt \qquad \text{e} \qquad dv = sen\, t\, dt \Longrightarrow v = -\cos t\,.$$

Portanto, substituindo-se os resultados na expressão,

$$\int u dv = u.v - \int v du \,,$$

tem-se

$$\int t\, sen\, t\, dt = -t\cos t + \int \cos t dt = -t\cos t + sen\, t + c\,.$$

Resolvendo-se a integral definida, segue que

$$\begin{aligned}
\int_1^{\theta} t\, sen\, t\, dt &= -t\cos t|_1^{\theta} + sen\, t|_1^{\theta} \\
&= (-\theta\cos\theta + 1.\cos 1) + (sen\,\theta - sen\, 1) \\
&= (-\theta\cos\theta + \cos 1) + (sen\,\theta - sen\, 1)\ .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}\left(\int_1^{\theta} t\, sen\, t\, dt\right) &= \frac{d}{d\theta}\left[(-\theta\cos\theta + \cos 1) + (sen\,\theta - sen\, 1)\right] \\
&= \frac{d}{d\theta}\left[(-\theta\cos\theta + \cos 1)\right] + \frac{d}{d\theta}\left[(sen\,\theta - sen\, 1)\right] \\
&= -\cos\theta + \theta\, sen\,\theta + \cos\theta = \theta\, sen\,\theta\,.
\end{aligned}$$

Desta forma então

$$\frac{d}{d\theta}\left(\int_1^{\theta} t\, sen\, t\, dt\right) = \theta\, sen\,\theta\,.$$

(5) Mostre que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} sen\, 5x\ \cos 2x\, dx = 0\,.$

Demonstração. Com efeito, utilizando-se a identidade

$$sen\, a\ \cos b = \frac{1}{2}[sen\,(a+b) + sen\,(a-b)]\,,$$

tem-se

$$sen\, 5x\ \cos 2x = \frac{1}{2}\left[sen\,(5x+2x) + sen\,(5x-2x)\right] = \frac{1}{2}\left[sen\, 7x\ +\ sen\, 3x\right]\ .$$

Assim sendo, a integral indefinida é dada por

$$\int sen\, 5x\ \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int sen\, 7x dx + \frac{1}{2}\int sen\ 3x dx = -\frac{\cos 7x}{14} - \frac{\cos 3x}{6} + c\,.$$

Resolvendo-se a integral definida, segue que

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} sen\, 5x \, \cos 2x \, dx &= -\left.\frac{\cos 7x}{14}\right|_{-\pi}^{\pi} - \left.\frac{\cos 3x}{6}\right|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{14}\left(-\cos 7[\pi] + \cos 7[-\pi]\right) - \frac{1}{6}\left(\cos 3[\pi] - \cos 3[-\pi]\right) \\ &= \frac{1}{14}(1-1) - \frac{1}{6}(-1+1) = 0\,.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen\, 5x \, \cos 2x \, dx = 0\,. \qquad \blacksquare$$

(6) Seja f uma função contínua e $f(x) \le M$ para todo $x \in [a,b]$. Então mostre que

$$\int_a^b f(x)dx \le M(b-a)\,.$$

Demonstração. De fato, como f é contínua e $f(x) \le M$ para todo $x \in [a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx = M \int_a^b dx = M \left. x\right|_a^b = M(b-a)\,. \qquad \blacksquare$$

(7) Se f é uma função par então mostre que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Demonstração. Com efeito,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx\,.$$

Efetuando-se a avaliação da primeira integral do segundo membro da identidade acima e levando-se em conta que f é par então $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in [-a,a]$, segue

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx\,.$$

Realizando-se uma mudança de variável do tipo $t = -x$ segue que $-dt = dx$, bem como, $x = -a \Rightarrow t = a$ logo,

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx = -\int_a^0 f(t)dt = \int_0^a f(t)dt\,.$$

Portanto,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx\,.$$

O leitor deve levar em conta que existem várias formas equivalentes de registrar a integral de uma função f, ou seja,

$$\int f(x)dx = \int f(z)dz = \int f(t)d(t)\,.$$

(8) Calcule o valor de $\displaystyle\int_{-3}^{-2}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx\,.$

Solução. Com efeito, observe

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{x^2-1}{x}\right)^2 = \frac{(x^2-1)2}{x^2} = \frac{x^4-2x^2+1}{x^2} = (x^2-2)+\frac{1}{x^2}\,.$$

Utilizando-se a nova expressão acima, a solução da integral indefinida é dada por

$$\begin{aligned}
\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx &= \int (x^2-2)dx + \int \frac{dx}{x^2}\\
&= \int x^2dx - 2\int dx + \int x^{-2}dx\\
&= \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + c\,.
\end{aligned}$$

Resolvendo-se, agora, a integral definida, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{-2}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx &= \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-3}^{-2} - 2\left.x\right|_{-3}^{-2} - \left.\frac{1}{x}\right|_{-3}^{-2}\\
&= \left(\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3}\right) - 2((-2)-(-3)) - \left(\frac{1}{(-2)} - \frac{1}{(-3)}\right)\\
&= \left(\frac{-8}{3} - \frac{-27}{3}\right) - 2(-2+3) - \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\\
&= \frac{-8}{3} + \frac{27}{3} + 4 - 6 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}\,.
\end{aligned}$$

(9) Encontre o valor de $\displaystyle\int_{1}^{2} x\ln x dx\,.$

Solução. A solução da integral indefinida é estabelecida pelo método da integração por partes, isto é,

$$u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{dx}{x} \qquad \text{e} \qquad dv = xdx \Longrightarrow v = \frac{x^2}{2}\,.$$

Portanto, substituindo-se os resultados na expressão,

$$\int udv = u.v - \int vdu\,,$$

tem-se

$$\int x\ln x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int \frac{x^2}{2}.\frac{dx}{x} = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4}\,.$$

Resolvendo-se a integral desejada, segue que

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\ln x dx &= \left.\frac{x^2\ln x}{2}\right|_1^2 - \left.\frac{x^2}{4}\right|_1^2 \\
&= \left(\frac{2^2\ln 2}{2} - \frac{1^2\ln 1}{2}\right) - \left(\frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4}\right) \\
&= \left(\frac{4\ln 2}{2} - \frac{\ln 1}{2}\right) - \left(\frac{4}{4} - \frac{1}{4}\right) = (2\ln 2 - 0) - \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\
&= 2\ln 2 - \frac{3}{4} = \frac{(8\ln 2 - 3)}{4}\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_1^2 x\ln x dx = \frac{(8\ln 2 - 3)}{4}\,.$$

(10) Determine o valor de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{(1+sen\,x)^5}$.

Solução. Considere a mudança de variável

$$u = sen\,x \Longrightarrow du = \cos x dx\,,$$

então

$$\int \frac{\cos x dx}{(1+sen\,x)^5} = \int \frac{du}{(1+u)^5}$$

Considere $v = u + 1$ então $dv = du$ e portanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{(1+u)^5} &= \int \frac{dv}{v^5} = \int v^{-5}dv = \frac{v^{-4}}{-4} \\
&= -\frac{(u+1)^{-4}}{4} = -\frac{(senx+1)^{-4}}{4} = -\frac{1}{4(1+sen\,x)^4}\,.
\end{aligned}$$

Resolvendo-se a integral desejada, segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{(1+sen\,x)^5} &= -\left.\frac{1}{4(1+sen\,x)^4}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\left(\frac{1}{4(1+sen\,\frac{\pi}{2})^4} - \frac{1}{4(1+sen\,0)^4}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{4(1+1)^4} - \frac{1}{4(1+0)^4}\right) = -\left(\frac{1}{64} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{15}{64}\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\, dx}{(1 + sen\, x)^5} = \frac{15}{64}\,.$$

(11) A solução do Problema de Valor Inicial (P.V.I)

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad y(a) = 0$$

é dada por

$$y(x) = \int_a^x f(t)dt\,.$$

Baseado nestas informações encontre a solução do PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \qquad y(1) = 0\,.$$

Solução. Com efeito,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow dy = \frac{dx}{x} \Longleftrightarrow \int dy = \int \frac{dx}{x}\,.$$

Portanto,

$$y(x) = \ln x + c \qquad (I)$$

Entretanto, o valor inicial é dado por $y(1) = 0$ então substituindo este valor em (I), obtém-se $0 = y(1) = \ln 1 + c$, isto é, $c = 0$.

Assim sendo,

$$y(x) = \ln x\,.$$

(12) Mostre que a solução do PVI

$$\frac{dP(t)}{dt} = k\sqrt{P(t)} \qquad P(0) = P_0\,,$$

é dada por

$$P(t) = \left(\frac{kt}{2} + \sqrt{P_0}\right)^2.$$

Solução. De fato,

$$\frac{dP(t)}{dt} = k\sqrt{P(t)} \Longleftrightarrow \frac{dP(t)}{[P(t)]^{\frac{1}{2}}} = kdt \Longleftrightarrow \int \frac{dP(t)}{[P(t)]^{\frac{1}{2}}} = \int kdt\,.$$

Portanto,

$$2\,[P(t)]^{\frac{1}{2}} = kt + c \Longleftrightarrow P(t) = \frac{[kt + c]^2}{4}\,.$$

Utilizando-se a condição inicial $P(0) = P_0$ segue que

$$P_0 = P(0) = \frac{[k.0 + c]^2}{4} \iff c = 2\sqrt{P_0}\,.$$

Assim sendo,

$$P(t) = \left(\frac{kt}{2} + P_0\right)^2 .$$

(13) Suponha que a lei que governa uma determinada Raça de Coelhos $C(t)$ seja dada pelo PVI

$$\frac{dC(t)}{dt} = kC^2(t) \qquad C(0) = C_0 \qquad \text{onde} \qquad k \in R_+^*\,.$$

Então, mostre que

$$C(t) = \frac{C_0}{(1 - kC_0 t)}\,.$$

Solução. Com efeito,

$$\frac{dC(t)}{dt} = kC^2(t) \iff \frac{dC(t)}{C^2(t)} = ktdt \iff \int \frac{dC(t)}{C^2(t)} = \int ktdt\,.$$

Portanto, resolvendo-se as integrais, obtém-se

$$-\frac{1}{C(t)} = kt + c \iff C(t) = -\frac{1}{kt + c} \qquad (A)\,.$$

Utilizando-se a condição inicial $C(0) = C_0$ segue que

$$C_0 = C(0) = -\frac{1}{c} \iff c = -\frac{1}{C_0}\,.$$

Efetuando-se a substituição da constante $c = -\frac{1}{C_0}$ dentro da expressão (A) segue que

$$C(t) = -\frac{1}{kt + c} \iff C(t) = -\frac{1}{kt - \frac{1}{C_0}} \iff C(t) = \frac{C_0}{(1 - kC_0 t)}\,.$$

Portanto,

$$C(t) = \frac{C_0}{(1 - kC_0 t)}\,.$$

(14) Resolva o seguinte Problema de Valor Inicial

$$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad y(1) = 10\,.$$

Solução A solução da equação associada é dada por

$$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Longleftrightarrow dy = 3\sqrt{x}dx + \frac{dx}{\sqrt{x}} \Longleftrightarrow \int dy = 3\int \sqrt{x}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{x}}\,.$$

Resolvendo-se as integrais obtém-se

$$y(x) = 3\int x^{\frac{1}{2}}dx + \int x^{-\frac{1}{2}}dx \Longleftrightarrow y(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c \qquad (B)\,.$$

Substituindo-se a condição inicial $y(1) = 10$ segue que

$$10 = y(1) = 2 + 2 + c \Longleftrightarrow c = 6\,.$$

Portanto, colocando-se $c = 6$ dentro da expressão (B) tem-se

$$y(x) = 2x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 6\,.$$

(15) Calcule a integral

$$\int_3^5 \frac{xdx}{(30 - x^2)^2}\,.$$

Solução Utilizando-se a substituição

$$u = (30 - x^2) \Longrightarrow du = -2xdx \Longrightarrow -\frac{du}{2} = xdx$$

resolvendo-se a integral indefinida, tem-se

$$\int \frac{xdx}{(30 - x^2)^2} = \int \left(-\frac{du}{2u^2}\right) = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{2}\int u^{-2}du\,.$$

Portanto, a solução é dada por

$$\int \frac{xdx}{(30 - x^2)^2} = \frac{1}{2u} = \frac{1}{(30 - x^2)}\,.$$

Resolvendo-se a integral definida, segue que

$$\int_3^5 \frac{xdx}{(30 - x^2)^2} = \left.\frac{1}{(30 - x^2)}\right|_3^5 = \frac{1}{30 - 25} - \frac{1}{30 - 9} = \frac{1}{5} - \frac{1}{21} = \frac{16}{105}\,.$$

(16) Determine o valor da integral

$$\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{sen\,\sqrt{x}\cos\,\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}}\,.$$

Solução Efetuando-se a substituição

$$u = \sqrt{x} \Longrightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Longrightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

a integral indefinida pode ser escrita como

$$\int \frac{sen\,\sqrt{x}\cos\,\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}} = 2\int sen\,u\cos\,u\,du \qquad (I)\,.$$

Substituindo-se $v = sen\,u$ segue que $dv = \cos u\,du$ desta forma, (I) é dada por

$$2\int sen\,u\cos\,u\,du = 2\int vdv = \frac{v^2}{2} = \frac{sen^2\,u}{2} = \frac{sen^2\,\sqrt{x}}{2}\,.$$

Assim sendo,

$$\int \frac{sen\,\sqrt{x}\cos\,\sqrt{x}\,dx}{=}\frac{sen^2\,\sqrt{x}}{2}\,.$$

Resolvendo-se a integral definida, tem-se,

$$\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{sen\,\sqrt{x}\cos\,\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}} = \left.\frac{sen^2\,\sqrt{x}}{2}\right|_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} = \frac{sen^2\,\pi}{2} - \frac{sen^2\frac{\pi}{2}}{2} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\,.$$

(17) Mostre que

$$\int \frac{xdx}{(1-x^2)^2} = \frac{1}{2(1-x^2)} + c\,.$$

Demonstração Com efeito, considere a mudança de variável

$$u = 1 - x^2 \Longrightarrow du = -2xdx \Longrightarrow -\frac{du}{2} = xdx\,.$$

Substituindo-se na integral original, tem-se

$$\int \frac{xdx}{(1-x^2)^2} = \int\left(\frac{-du}{2}\right)\frac{1}{u^2} = -\frac{1}{2}\int u^{-2}du = -\frac{1}{2}\frac{u^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{2u} + c = \frac{1}{2(1-x^2)} + c \qquad \blacksquare$$

(18) Mostre que

$$\int_0^a \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}\sqrt{a^3}\,.$$

Demonstração A solução da integral indefinida associada ao problema é dada por

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\,.$$

Resolvendo-se a integral definida, tem-se

$$\int_0^a \sqrt{x}dx = \left.\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^a = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2.0^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{a^3}. \qquad \blacksquare$$

(19) Define-se o Comprimento de Arco S de uma curva suave de uma função contínua e derivável num intervalo $[a, b]$ por

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx .$$

Utilizando-se esta definição encontre o comprimento de arco da curva definida pela função

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \qquad \text{no intervalo} \qquad [0, 5] .$$

Solução Para obter o comprimento de arco desta função no intervalo dado é necessário encontrar os elementos integrantes para uso da fórmula, isto é,

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow (f'(x))^2 = \frac{9}{4}x .$$

Assim sendo, aplicando-se a fórmula tem-se

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx .$$

Utilizando-se a mudança de variável

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \Longrightarrow du = \frac{9}{4}dx \Longrightarrow \frac{4}{9}du = dx ,$$

a integral indefinida é dada por

$$\int \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \frac{4}{9}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{4}{9}.\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} .$$

A solução da intgral definida,

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \left.\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right|_0^5 = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}.5\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}.0\right)^{\frac{3}{2}} .$$

Efetuando-se os cálculos, segue que

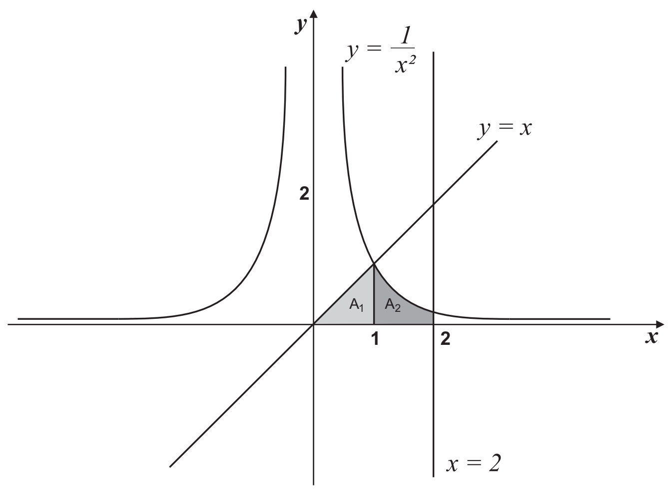
$$\begin{aligned}
\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}.5\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}.0\right)^{\frac{3}{2}} &= \frac{8}{27}.\left(1 + \frac{45}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}(1+0)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{8}{27}.\left(\frac{49}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}(1)^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{8}{27}.\left(\frac{7}{2}\right)^{3} - \frac{8}{27}.1^3 = \frac{343}{27} - \frac{8}{27} = \frac{335}{27} .
\end{aligned}$$

Portanto, o comprimento de arco é dado por

$$S = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \frac{335}{27} \; u.c. \qquad \text{u.c=unidades de comprimento}\,.$$

(20) Ache a área compreendida entre as curvas

$$y = x \qquad x = 2\,, \qquad y = \frac{1}{x^2} \qquad \text{e} \qquad y \geq 0\;.$$

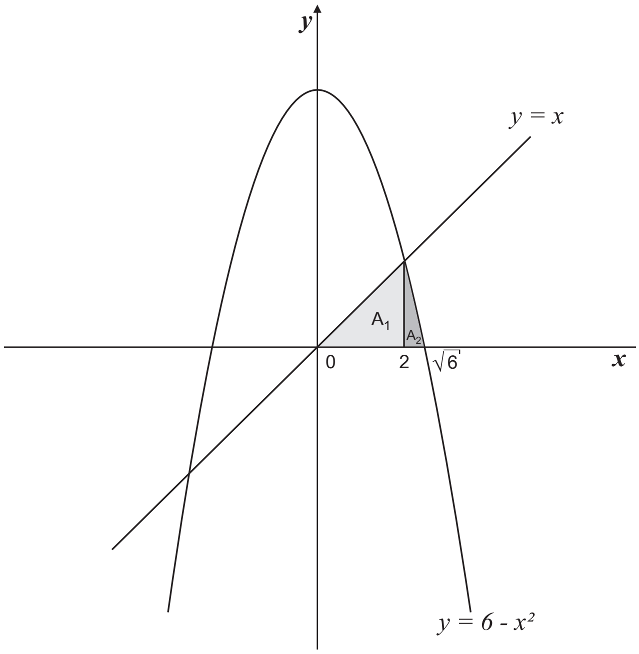


Solução. Observe o gráfico, a área desejada é obtida através de duas integrais. Isto é, a área A_1 é dada pela integral de 0 até 1 da função $y = x$ e a segunda área A_2 é dada pela integral de 1 até 2 da função $y = \dfrac{1}{x^2}$. Desta forma, segue

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 xdx + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 + \left[-\frac{1}{x}\right]\bigg|_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{0}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1\,.$$

(21) Determine a área compreendida entre as curvas

$$y = x\,, \qquad y = 6 - x^2 \qquad \text{e} \qquad y \geq 0\,.$$



Solução. Baseado no gráfico abaixo concluí-se que área desejada é a soma de duas áreas. A primeira área A_1 é dada pela integral 0 até 2 da função $y = x$ e a segunda área é obtida através da integral de 2 até $\sqrt{6}$ da função $y = 6 - x^2$. o ponto $x = \sqrt{6}$ é o ponto do eixo dos x que faz com que as funções $y = x$ e $y = 6 - x^2$ tenham a mesma ordenada, isto é vem do fato de que $x = 6 - x^2$.
Portanto,

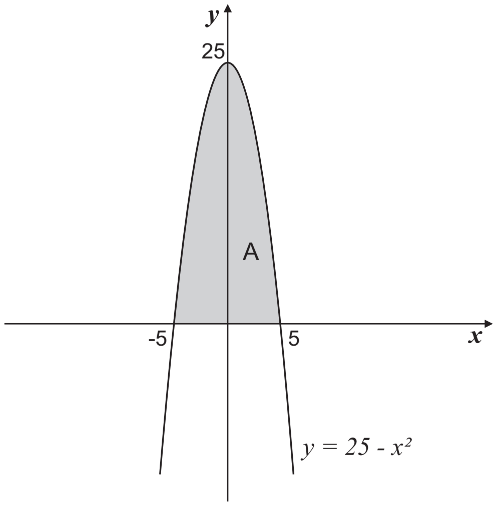
$$A = A_1 + A_2 = \int_0^2 x dx + \int_2^{\sqrt{6}} (6 - x^2) dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 + 6x|_2^{\sqrt{6}} - \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^{\sqrt{6}}.$$

Assim sendo,

$$A = \left(\frac{4}{2} - \frac{0}{2}\right) + \left(6.\sqrt{6} - 6.2\right) - \left(\frac{(\sqrt{6})^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) = \frac{12\sqrt{6} - 22}{3} \ u.A.$$

(22) Determine a área delimitada pelas curvas,

$$y = 0 \qquad \text{e} \qquad y = 25 - x^2 .$$



Solução. O gráfico abaixo permite concluir que a área desejada é obtida mediante a integração da função $y = 25 - x^2$ de -5 até 5.

Portanto

$$A = \int_{-5}^{5} (25 - x^2)dx = 25 \int_{-5}^{5} dx - \int_{-5}^{5} x^2 dx = 25x|_{-5}^{5} - \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-5}^{5} = 250 - \frac{250}{3} = \frac{500}{3}.$$

Assim sendo,

$$A = \frac{500}{3} \; u.A.$$

6.11 Exercícios Propostos

1ª Questão. Use o método de substituição de váriáveis para encontrar as seguintes integrais:

$$(a) \quad \int \left(\sqrt{x^3} + \frac{1}{2x} \right) dx \qquad (b) \quad \int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx \quad (c) \int e^{x^2+5x}(2x+5)dx$$

2ª Questão. Encontre a solução das integrais abaixo usando integração por partes

$$(a) \int e^x \operatorname{sen} x dx \quad (b) \int x^2 \cos x \, dx \quad (c) \int x \ln x \, dx.$$

3ª Questão. Encontre o resultado de

$$\frac{d}{dx} \left(\int_2^x \sqrt{t+3} \; dt \right).$$

4ª Questão. Encontre a área compreendida entre as curvas, usando integral definida

$$y = \sqrt{x}, \qquad x = 1, \qquad \text{e} \qquad y = 0.$$

5ª Questão. Calcule a integral da seguinte função

$$\int \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}\, dx\,.$$

6ª Questão. Resolva as seguintes integrais:

$$\int \frac{\ln(\sqrt{ax+b})}{\sqrt{ax+b}}\, dx\,, \qquad \int e^x \cos x\, dx \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \left(\sqrt{t-2}\, dt\right)\right].$$

7ª Questão. Calcule a área compreendida entre as curvas

$$y = x\,, \qquad y = 6 - x^2\,, \qquad \text{e} \qquad y \geq 0\,.$$

8ª Questão. Calcule a integral da seguinte função

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\, dx\,.$$

9ª Questão. Resolva as seguintes integrais:

$$\int \frac{\ln(\sqrt{2x+e^2})}{\sqrt{2x+e^2}}\, dx\,, \qquad \int x^2 \cos x\, dx \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{dx}\left[\int_0^x \left(\sqrt{t+8}\, dt\right)\right].$$

10ª Questão. Calcule a área compreendida entre as curvas

$$y = x\,, \qquad y = x^2\,, \qquad \text{de} \quad x = 0 \quad \text{até} \quad x = 1\,.$$

11ª Questão. Determine as integrais abaixo usando o método das frações parciais.

(a) $\displaystyle\int \frac{-4x^2}{2x^3+x^2-2x-1}\, dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{x}{8x^3-12x^2+6x-2}\, dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{5\, dx}{(x^3+4x)^2}\, dx$ (d) $\displaystyle\int \frac{(x^2+1)}{x^4-7x^3+18x^2-20x+8}\, dx\,.$

12ª Questão. Calcule as seguintes integrais utilizando substituições trigonométricas.

(a) $\displaystyle\int tg^3\, x\, dx$ (b) $\displaystyle\int cotg^4\, 3x\, dx$ (c) $\displaystyle\int sec^3\, x\, dx$ (d) $\displaystyle\int tg^5\, x\, sec^4\, x\, dx$

(e) $\displaystyle\int sen^2\, x\, cos\, 4x\, dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2\, x\, \cos^2\, x\, dx$ (g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} sen\, 2x\, \cos\, 4x\, dx\,.$

13ª Questão.

(a) Ache a área limitada pelas curvas $y = x^2 - 4x$ e $y = x^3 - 6x^2$.

(b) Encontre a área compreendida entre as curvas $y = x$, $y = \dfrac{1}{x^2}$, $x = 2$ e $y \geq 0$.

14ª Questão. Encontre a área limitada pelas curvas:

(a) $y = x^2 \quad e \quad x = y^3$;

(b) $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = 1$, $x = -1$ e $x = 1$;

(c) $y = x^2$ e $y = 8 - x^2$;

(d) $y = \cos x$, o eixo dos x, o eixo dos y e $x = \dfrac{\pi}{6}$;

(e) $y = \dfrac{1}{x} + x$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 1$ e $y = 3$.

15ª Questão. Seja f contínua em $[-a, a]$. Mostre que se f é uma função par então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$

E se f for ímpar então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

16ª Questão. Seja $f(x) = 4\sqrt{x}$ então calcule $\displaystyle\int_0^4 f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$.

17ª Questão. Encontre o resultado das seguintes expressões:

$$(a) \quad \frac{d}{d\theta}\left[\int_0^{\theta} t\, sen\, t\, dt\right] \qquad\qquad (b) \quad \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y}\left\{\frac{d}{dy}\left[\int_3^{y}\left(\frac{2x}{x^2+9}\right)dx\right]\right\}.$$

18ª Questão. Mostre que a solução do Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\frac{dW(t)}{dt} = K\sqrt{W(t)} \qquad W(0) = W_0$$

é dada por $\quad W(t) = \left(\dfrac{Kt}{2} + \sqrt{W_0}\right)^2$.

19ª Questão. O comprimento de arco de uma curva suave definida num intervalo $[a, b]$ é dado por

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Encontre o comprimento de arco da curva $f(x) = \sqrt{x^3}$ em $[0, 1]$.

20ª Questão. Encontre a solução do Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\frac{dP(t)}{dt} = K\, P^3(t), \qquad P(0) = P_0 \quad \text{onde} \quad K \in \mathbb{R}.$$

Capítulo 7

Apêndice: Matemática Elementar

7.1 Fórmulas e Identidades Notáveis

As razões trigonométricas num triângulo retângulo são expressas por

$$\cos\,\theta\;=\frac{Cateto\,Adjacente}{Hipotenusa}\qquad \operatorname{sen}\theta\;=\frac{Cateto\,Oposto}{Hipotenusa}\qquad \operatorname{tg}\theta\;=\frac{Cateto\,Oposto}{Cateto\,Adjacente}\;.$$

Identidades Trigonométricas Estratégicas

$$\operatorname{tg}\theta\;=\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\qquad \operatorname{cotg}\theta\;=\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\qquad \sec\theta\;=\frac{1}{\cos\theta}\qquad \operatorname{cosec}\theta\;=\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\,.$$

Identidades Fundamentais da Trigonometria

$$\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1\qquad 1+\operatorname{tg}^2\theta=\sec^2\theta\qquad 1+\operatorname{cotg}^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta\;.$$

Fórmulas de Adição de Arcos

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha+\beta)&=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\,,\\ \cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\,.\end{aligned}$$

Fórmulas do Arco Duplo

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}2\theta&=2\operatorname{sen}\theta\cos\theta,\\ \cos2\theta&=1-2\operatorname{sen}^2\theta\,.\end{aligned}$$

Fórmulas do Meio Arco

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\ , \\ \text{sen}^2\theta &= \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\ . \end{aligned}$$

7.1.1 Leis da Exponenciação e Radiciação

$$a^n a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{nm} \qquad (ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)\,,$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\,.$$

7.1.2 Raízes da Equação do 2º Grau

A equação do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)\,,$$

tem soluções

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\ .$$

A equação do segundo grau tem raízes reais e distintas quando $\Delta > 0$, raízes reais e iguais quando $\Delta = 0$ e não possui raízes reais quando $\Delta < 0$.

7.1.3 Fatoração

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^4 - b^4 &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)\,. \end{aligned}$$

7.1.4 Exercícios Elementares

1. Efetue as operações com frações.

a) $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}+1$

b) $\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{5}\cdot\left(\dfrac{1}{2}+1\right)$

c) $\dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{3-\dfrac{1}{2}}$

d) $\dfrac{\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3}}}{1-\dfrac{1}{2}}$

e) $\dfrac{3}{2}\cdot\left\{\dfrac{1}{2}-\left[\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}-1+\dfrac{1}{3}\cdot\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\right]\right\}$

f) $\dfrac{1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}}{1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{4}}}$

g) $\dfrac{\dfrac{4}{3}-1+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{5}\right)}{2-\dfrac{1}{3}.\left(\dfrac{2}{3}-1\right)}$

h) $\dfrac{\dfrac{3}{2}-1+\dfrac{4}{3}.\left(1-\dfrac{1}{2}\right)-1}{1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}.\left(4-\dfrac{1}{3}\right)+3}.$

2. Encontre o valor da expressão

a) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+1$

b) $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{2}-1\right)^{-2}+\left(1-\frac{1}{3}\right)^{0}-\frac{1+\frac{1}{3}}{2}$

c) $\left(\frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{3}}\right)^{-2}+\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{3-\frac{1}{2}}\right)$

d) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\right]$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot\left[\frac{1}{2}+\left(1-\frac{2}{3}\right)^{1}\right]^{2}$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\cdot\left(3-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^{2}$

g) $\left(\frac{3-\frac{1}{2}}{5-\frac{8}{3}}\right)^{-2}-\left(\frac{3-1}{1-\frac{1}{2}}\right)^{2}$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\cdot\left[\left(1-\frac{1}{5}\right)^{0}-\left(2-\frac{1}{3}\right)^{1}-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]^{2}.$

3. Determine o valor da expressão a seguir

a) $\sqrt{18}+\sqrt{8}-3\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt{9}-\sqrt{16}+\sqrt{8}+6\sqrt{2}}{\sqrt{81}-3\sqrt{4}+\sqrt{16}+3\sqrt{8}}$

c) $\left(\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^{2}+\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{-2}$

d) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

e) $\left\{\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^{(1-\frac{1}{2})}\right]^{2}-\left[\dfrac{(1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right]^{-1}\right\}^{2}.$

4. Sejam

$$Y=\left\{\left(\frac{\sqrt{A}-\sqrt{B}}{\sqrt{C}+\sqrt{D}}\right)^{E}\right\}^{F-\frac{1}{2}}$$

Então determine Y quando $A=4;\ B=1;\ C=9;\ D=16;\ E=-1$ e $F=1.$

5. Se $a=1;\ b=-3$ e $c=2$, determine as raízes da equação $ax^2+bx+c=0.$

6. Se $a=2;\quad b=-6$ e $c=18$, determine a soma, a diferença e o produto das raízes da equação $ax^2+bx+c=0.$

7. Simplifique as expressões

a) $\dfrac{4x+4-8y+16}{x-2y+5}$

b) $\dfrac{3x^2+6x+x+2}{x+2}$

c) $\dfrac{t^4+t^3+t^2+t}{t}$

d) $\sqrt{\dfrac{9t^2-9}{t+1}}$

e) $\dfrac{t^3 + t^2 + t + 1}{t + 1}$

f) $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$.

7.2 CONJUNTOS NUMÉRICOS

7.2.1 Introdução

A ideia de contagem talvez seja mais antiga do que as próprias civilizações, haja vista que em achados arqueológicos (não muito recentes) foram identificadas gravações em ossos de animais com uma espécie de marcação de contagem que datavam da pré-história. Acredita-se que a idéia ordinal tivesse sido anterior à cardinal, pois, antigas tribos em seus rituais costumavam representar cenas à respeito da criação do universo na qual inúmeros membros eram necessários para completar as cenas. Cada um desses membros tinham o compromisso de entrar em cena mediante uma certa ordem. A idéia de número pode ser entendida como sendo uma relação entre dois conjuntos, onde um deles representa uma quantidade de objetos que desejamos contar e o outro uma coleção de atributos (todos semelhantes). Se a cada atributo for possível associar a um objeto, então a quantidade de relações descritas pelas ligações entre os atributos e os objetos é o que entendemos pela idéia chamada de número. Portanto, número é uma idéia, particularmente, fruto do estabelecimento de uma relação entre dois conjuntos.[1]

7.2.2 Descrições dos Conjuntos Numéricos

O conjunto cujos elementos foram estabelecidos com a finalidade de contar objetos é especificado por

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \ . \tag{7.1}$$

Na verdade, por conveniência e operacionalidade, doravante nesta literatura, este conjunto com a inclusão do zero será definido como o conjunto dos números naturais e

[1]Boyer, Carl. História da Matemática

denotado por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \ . \tag{7.2}$$

Se retirarmos o elemento zero, o novo subconjunto será denotado por

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\} \ . \tag{7.3}$$

Convém observar que alguns historiadores classificavam o conjunto $\mathbb{N}$, não apenas como o conjunto dos números naturais, mas também como o conjunto dos números inteiros positivos. Suponha que estivéssemos interessados em encontrar a solução de uma equação do tipo

$$x + 8 = 3 \ . \tag{7.4}$$

Uma breve observação nos permite concluir que a equação (7.4) não admite um número natural como solução. Para que esta equação seja resolvida, bem como para que outros problemas desta natureza também possam ter soluções necessitamos de números com outras características. Um conjunto de números com estas características é conhecido como conjunto dos números inteiros e denotado por

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}\cdot \tag{7.5}$$

Associado a este conjunto existem os seguintes subconjuntos comuns na literatura:

$$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots\}; \tag{7.6}$$

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}; \tag{7.7}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0\}, \tag{7.8}$$

os quais são conhecidos como o conjunto dos números inteiros sem o zero, o conjunto dos números inteiros não negativos e o conjunto dos números inteiros não positivos, respectivamente. Dando prosseguimento ao estabelecimento de alguns conjuntos numéricos, considere agora a seguinte equação

$$2x - 5 = 8 \tag{7.9}$$

é facíl observar que a solução desta equação não está presente no conjunto dos números inteiros descritos acima. Com a finalidade de resolver tal equação, bem como outros problemas semelhantes necessitamos de outras espécies de números, que são conhecidos como números racionais ou fracionários e denotados por

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \quad \text{tal que} \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad b \neq 0 \right\} \cdot \tag{7.10}$$

Convém observar que todos os números inteiros e consequentemente os números naturais estão inseridos no conjunto (7.10). As dízima períodicas também estão presentes neste conjunto, haja vista que podem ser representadas por uma fração. Por exemplo, verifique se a dízima $1,272727\ldots$ pode ser escrita como uma fração. Senão vejamos

$$1,272727\ldots = 1 + 0,272727\ldots$$

escrevendo

$$0,272727\ldots = x \tag{7.11}$$

então, multiplicando (7.11) por 100, tem-se

$$\begin{aligned} 100x &= 27 + 0,272727\ldots \\ 100x &= 27 + x \\ 100x - x &= 27 \\ 99x &= 27 \\ x &= \frac{27}{99} = \frac{3}{11}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$1,272727\ldots = 1 + \frac{3}{11} = \frac{14}{11}.$$

Antes de voltar a caracterizar outros conjuntos numéricos, vamos apresentar um teorema considerado relevante para o desenvolvimento das próximas etapas da presente seção.

Teorema 1. Se p^2 é par então p é par.

Demonstração. Suponha que p não seja par, então p é ímpar. Desta forma, tem-se $p = 2n + 1$ com $n \in \mathbb{N}$ e então $p^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$. Chamando $k = 2n^2 + 2n$ significa que $p^2 = 2k + 1$, o que caracteriza um número ímpar, ou seja, p^2 é ímpar. Logo, é uma contradição, pois, por hipótese p^2 é par.

Portanto, p não poder ser ímpar como havíamos afirmado, logo, o número p só pode ser par.

Voltando as descrições dos conjuntos numéricos, considere inicialmente a equação

$$x^2 - 2 = 0\,. \tag{7.12}$$

Sabemos que $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$ são as soluções desta equação. Mas, $\sqrt{2}$ é um número racional, isto é, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$? Para tentar responder esta pergunta, suponha que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, então $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ onde $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Admite-se também que $\mathbf{mdc}\,(a, b) = 1$, ou seja, que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ com $\dfrac{a}{b}$ irredutível. Assim sendo,

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \implies \frac{a^2}{b^2} = 2 \implies a^2 = 2b^2$$

o que caracteriza que a^2 é par e portanto pelo Teorema 1 a é par. Desta forma, podemos escrever, $a = 2c \Rightarrow 2b^2 = 4c^2 \Rightarrow b^2$ é par, portanto, b é par. Concluímos que tanto a quanto b são pares, o que acarreta então que $\mathbf{mdc}\,(a, b) \neq 1$. Logo, $\sqrt{2}$ não pode ser da forma $\dfrac{a}{b}$, ou seja, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

A resolução de equações do tipo (7.12) necessita então de outras espécies de números, que não sejam os especificados através de frações. Isto é, $\sqrt{2}$ é um destes números, existem muitos outros $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{p}$ onde p é primo, $\pi = 3,1415\ldots$, $e = 2,718\ldots$ etc. Este conjunto é conhecido como o conjunto dos números irracionais e denotado por $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{I}$. A reunião dos conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ com $\mathbb{I}$ é o que chamamos de conjunto dos números reais, ou simplesmente, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ com $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

7.2.3 Propriedades

Fechamento

Se x e $y \in \mathbb{R}$ então existe um e somente um número real, denotado por $x + y$, chamado soma. Bem como, existe um e somente um número real, denotado por xy chamado produto.

Associativa

Adição. $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Multiplicação. $x(yz) = (xy)z$.

Comutativa

Adição. $x + y = y + x$.

Multiplicação. $xy = yx$.

Elemento Neutro

Adição. Existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Multiplicação. Existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $x.1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Elemento Simétrico (Oposto)

Adição. Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe o simétrico de x indicado por $-x$ tal que $x + (-x) = 0$.

Elemento Inverso

Multiplicação. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, existe o inverso de x indicado por x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ tal que $x.x^{-1} = 1$.

Distributiva da Multiplicação em Relação à Adição

$x(y + z) = xy + xz$

Anulamento do Produto

$x.y = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$

Lei do Cancelamento

$x + y = y + z \Rightarrow x = z$.

No conjunto dos números Reais temos também uma relação de ordem.

Axioma de ordem

No conjunto dos números reais existe um subconjunto denominado de números positivos, tal que:

(i) Se $x \in \mathbb{R}$, então ocorre somente uma das três afirmações:

$$x = 0\,, \quad \text{ou} \quad x \quad \text{é positivo}\,, \quad \text{ou} \quad -x \quad \text{é positivo}$$

(ii) A soma de dois números positivos é positivo;

(iii) O produto de dois números positivos é positivo;

7.2.4 Desigualdades

Os símbolos $<$ (menor que), $>$ (maior que), $\leq$ (menor ou igual que), $\geq$ (maior ou igual que) são usados para comparar números reais. Expressões envolvendo tais símbolos são chamadas de desigualdades.

$x < y$ e $x > y$ são desigualdades estritas;

$x \leq y$ e $x \geq y$ são desigualdades não estritas.

Propriedades

(i) Se $a > b$ e $b > c$ então $a > c$,

(ii) Se $a > b$ e $c > 0$ então $ac > bc$,

(iii) Se $a > b$ e $c < 0$ então $ac < bc$,

(iv) Se $a > b$, então $a + c > b + c \ \forall\, c \in \mathbb{R}$,

(v) Se $a > b$ e $c > d$ então $a + c > b + d$,

(vi) Se $a > b > 0$ e $c > d > 0$ então $ac > bd$.

7.2.5 Valor Absoluto

Define-se o valor absoluto (ou módulo) de um número real x por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0\,. \end{cases}$$

Propriedades

Sejam x e y números reais.

(i) $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $|x|^2 = x^2$

(iii) $\sqrt{x^2} = |x|$

(iv) $|x| = |-x|$

(v) Suponha que $a > 0$, então

$$|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a\,,$$

$$|x| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x \leq a \text{ ou } x \geq a\,.$$

(vi) $|x.y| = |x|.|y|$

(vii) $x \leq |x|$ e $-x \leq |x|$

(viii) Desigualdade Triangular

$$|x+y| \leq |x| + |y|\,.$$

7.2.6 Exemplos

1) Encontre a solução da inequação

$$\frac{2x-1}{x-3} > 5\,.$$

Solução

$$\frac{2x-1}{x-3} - 5 > 0 \Longrightarrow \frac{2x-1-5(x-3)}{x-3} > 0 \Longrightarrow \frac{2x-1-5x+15}{x-3} > 0 \Longrightarrow \frac{-3x+14}{x-3} > 0\,.$$

Vamos estudar os sinais das expressões que aparecem no quociente.

<u>1º Caso:</u> $-3x+14 > 0$ e $x-3 > 0$ possibilitam as seguintes situações:

$$-3x+14 > 0 \Longrightarrow -3x > -14 \Rightarrow x < \frac{14}{3} \qquad \text{e} \qquad x-3 > 0 \Longrightarrow x > 3.$$

A solução para este primeiro caso é dada por

$$S_1 = \left]\, 3\,, \frac{14}{3} \right[\,.$$

<u>2º Caso.</u> $-3x+14 < 0$ e $x-3 < 0$ possibilitam as seguintes situações:

$$-3x+14 < 0 \Longrightarrow -3x < -14 \Rightarrow x > \frac{14}{3} \qquad \text{e} \qquad x-3 < 0 \Longrightarrow x < 3.$$

A solução para este caso será expressa por

$$S_2 = \left]-\infty\,, 3\right[\cap \left]\frac{14}{3}\,, \infty\right[\;=\; \emptyset.$$

Portanto, a solução final é dada por

$$S = \left] 3\,,\ \frac{14}{3} \right[\ .$$

2) Determine a solução da inequação:

$$\frac{1}{3x-7} \geq \frac{4}{3-2x}\cdot$$

Solução.

$$\frac{1}{3x-7} - \frac{4}{3-2x} \geq 0 \Rightarrow \frac{3-2x-4(3x-7)}{(3x-7)(3-2x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{-14x+31}{(3x-7)(3-2x)} \geq 0\,.$$

Para a resolução desta inequação é necessário considerar os seguintes casos:

<u>1º Caso.</u> $-14x+31 \geq 0$, $(3x-7) > 0$ e $(3-2x) > 0$;

<u>2º Caso.</u> $-14x+31 \geq 0$, $(3x-7) < 0$ e $(3-2x) < 0$;

<u>3º Caso.</u> $-14x+31 \leq 0$, $(3x-7) < 0$ e $(3-2x) > 0$;

<u>4º Caso.</u> $-14x+31 \leq 0$, $(3x-7) > 0$ e $(3-2x) < 0$.

A solução é vazia tanto para o 1º Caso, quanto para o 3º Caso. Ou seja, não existem números reais que satisfazem simultaneamente as condições inseridas nestes casos. Por outro lado, é fácil observar que a solução para o 2º Caso é dada por $\left] \frac{3}{2}, \frac{31}{14} \right]$ e a solução para o 4º Caso será $\left] \frac{7}{3}, +\infty \right[$.

Portanto, a solução final é escrita da seguinte forma

$$S = \left] \frac{3}{2}, \frac{31}{14} \right] \cup \left] \frac{7}{3}, +\infty \right[\ .$$

3) Resolva a inequação:

$$x^3+1 > x^2+x\cdot$$

Solução.

$$x^3+1 > x^2+x \Rightarrow x^3-x^2-x+1 > 0 \tag{7.13}$$

Por inspeção observa-se que 1 é raiz com multiplicidade 2 e que -1 é uma raiz simples da equação associada a inequação que desejamos resolver. Desta forma então é fácil ver que

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x^2 - 1)(x - 1) = (x - 1)^2(x + 1)\,. \tag{7.14}$$

Portanto,

$$(x - 1)^2(x + 1) > 0.$$

O termo $(x - 1)^2$ é sempre positivo, então significa que é suficiente analisar o outro termo integrante do produto, isto é, basta analisar quais são os valores que fazem com que $(x + 1)$ seja maior do que zero. O resultado será $x > -1$. Logo, a solução da inequação é dada por

$$S = \,]-1, +\infty[\;.$$

4) Encontre a solução da inequação abaixo

$$-4 \leq \frac{3 - 2x}{2 + x} \leq 4\cdot \tag{7.15}$$

Solução: Para resolver este problema vamos separá-lo em duas inequações, a solução desejada consiste em obter a intersecção das soluções obtidas para cada inequação.

<u>1ª Inequação</u>

$$\frac{3 - 2x}{2 + x} \geq -4\,;$$

<u>2ª Inequação</u>

$$\frac{3 - 2x}{2 + x} \leq 4\,.$$

<u>**Solução da 1ª Inequação**</u>

$$\frac{3 - 2x}{2 + x} \geq -4 \tag{7.16}$$

Primeira Parte Se $2 + x > 0$ isto é, $x > -2$ então multiplicando ambos os membros da inequação (7.16) por $(x + 2)$, obtemos

$$\frac{3 - 2x}{2 + x}\,(2 + x) \geq -4(2 + x) \Rightarrow 3 - 2x \geq -4(2 + x)$$

$$3 - 2x \geq -8 - 4x \Rightarrow 2x \geq -11 \Rightarrow x \geq \frac{-11}{2}.$$

A solução desejada é então a interseção da condição inicial $x > -2$ e $x \geq \frac{-11}{2}$. O resultado é dado por

$$S_1' = \,]-2, +\infty[\,.$$

Segunda Parte Se $2 + x < 0$, ou seja, $x < -2$, então usando um procedimento análogo ao anterior, segue que

$$\frac{3 - 2x}{2 + x}(2 + x) \leq -4(2 + x)$$

$$3 - 2x \leq -4(2 + x) \Rightarrow 3 - 2x \leq -8 - 4x \Rightarrow 2x \leq -11 \Rightarrow x \leq \frac{-11}{2}.$$

Convém observar que a desigualdade mudou de sinal em função do termo $x + 2$ ser negativo. A solução deste caso é dada pela interseção de $x < -2$ com $x \leq \frac{-11}{2}$. O resultado é dado por

$$S_1'' = \left] -\infty, \frac{-11}{2} \right[.$$

Portanto, a solução da 1ª Inequação é dada a partir da união das soluções S_1' com S_1''. O resultado é dada por

$$S_1 = S_1' \cup S_1'' = \left] -\infty, \frac{-11}{2} \right[\cup \,]-2, +\infty[\,.$$

Solução da 2ª Inequação

$$\frac{3 - 2x}{2 + x} \leq 4.$$

Primeira Parte Se $2 + x > 0$, ou seja, $x > -2$, então

$$\frac{3 - 2x}{2 + x}(2 + x) \leq +4(2 + x)$$

$$3 - 2x \leq 8 + 4x \Rightarrow -6x \leq 5 \Rightarrow 6x \geq -5 \Rightarrow x \geq \frac{-5}{6}.$$

A solução é determinada pela interseção de $x > -2$ com $x \geq \frac{-5}{6}$. O resultado é dado por

$$S_2' = \left[\frac{-5}{6}, +\infty \right[.$$

Segunda Parte Se $2 + x < 0$, ou seja, $x < -2$, então

$$\frac{3 - 2x}{2 + x}\,(2 + x) \geq +4(2 + x)\,.$$

Convém observar que a desigualdade muda de sinal em função do termo $(x + 2)$ ser negativo.

$$3 - 2x \geq 4(2 + x) \Rightarrow 3 - 2x \geq 8 + 4x \Rightarrow -6x \geq 5 \Rightarrow 6x \leq -5 \Rightarrow x \leq \frac{-5}{6}.$$

A solução é dado pela interseção de $x < -2$ com $x \leq \frac{-5}{6}$. O resultado é dada por

$$S_2'' = \left]-\infty,\, -2\right[\,.$$

Portanto, a solução da 2ª Inequação é obtida a partir da união das soluções S_2' com S_2''. O resultado é dado por

$$S_2 = S_2' \cup S_2'' = \left[\frac{-5}{6}, +\infty) \cup (-\infty,\, -2\right[\,.$$

Portanto, a solução do problema (7.15) é dada pela interseção das soluções das duas Inequações, isto é, $S = S_1 \cap S_2$. O resultado é dado por

$$S = \left]-\infty,\, \frac{-11}{2}\right] \cup \left[\frac{-5}{6},\, +\infty\right[\,.$$

5) Resolva a inequação

$$|x + 3| > 1.$$

Solução

Utilizando-se a propriedade de módulo de um número real, segue que

$$|x + 3| > 1 \iff x + 3 \,<\, -1 \text{ ou } x + 3 \,>\, 1.$$

Portanto,

$$x + 3 \,<\, -1 \Longrightarrow x \,<\, -4 \qquad \text{ou} \qquad x + 3 \,>\, 1 \Longrightarrow x \,>\, -2$$

o que significa que a solução procurada é dada por

$$S = \left]-\infty,\, -4\right[\,\cup\, \left]-2,\, +\infty\right[\,.$$

6) Resolva a inequação abaixo:

$$|2x+3| \leq 1.$$

Solução Por definição tem-se

$$-1 \leq \quad 2x+3 \quad \leq 1\,.$$

A solução é obtida observando a seguinte sequência

$$-1 \leq \quad 2x+3 \quad \leq 1 \quad \text{(somando } -3 \text{ em todos os membros)}$$

$$-4 \leq \quad 2x \quad \leq -2 \quad \text{(dividindo toda a expressão por 2)}$$

$$-2 \leq \quad x \quad \leq -1$$

Portanto,

$$S = [\,-2,\,-1]\ .$$

7) Encontre o conjunto solução da inequação modular

$$\left|\frac{5}{2x-1}\right| \geq \left|\frac{1}{x-2}\right|\ .$$

Solução: Senão vejamos

$$\left|\frac{5}{2x-1}\right|^2 \geq \left|\frac{1}{x-2}\right|^2 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{25}{(2x-1)^2}\right) \geq \left(\frac{1}{(x-2)^2}\right)\ ;$$

onde as condições de existência desta inequação são dadas por

$$2x-1 \neq 0 \Longrightarrow x \neq \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad x-2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 2\,.$$

Assumindo estas exigências, segue que

$$\begin{aligned} \frac{25}{(2x-1)^2} \quad \geq \quad \frac{1}{(x-2)^2} \quad &\Longrightarrow \quad 25(x-2)^2 \geq (2x-1)^2 \\ &\Longrightarrow \quad 25(x^2-4x+4) \geq 4x^2-4x+1 \\ &\Longrightarrow \quad 25x^2-100x+100 \geq 4x^2-4x+1 \\ &\Longrightarrow \quad 7x^2-32x+33 \geq 0\,. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação associada a inequação, obtemos como raízes $x = 3$ e $x = \frac{3}{11}$. Portanto, é equivalente obter a solução da seguinte inequação

$$7x^2 - 32x + 33 = (x-3)(x - \frac{3}{11}) \geq 0\,.$$

A análise dos sinais dos termos integrantes da inequação, ou seja, $(x-3)$ e $(x - \frac{3}{11})$, fornece a seguinte solução

$$S = \left]-\infty, \frac{11}{7}\right] \cup [3, +\infty[- \left\{\frac{1}{2}\right\}\,.$$

8) Mostre que $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$, sempre que $a,\, b \in \mathbb{R}_+$.

Demonstração. Com efeito,

$$(a-b)^2 \geq 0 \implies a^2 - 2ab + b^2 \geq 0\,.$$

Somando $4ab$ em ambos os membros da desigualdade acima, segue que

$$a^2 + 2ab + b^2 \;\geq\; 4ab \;\Rightarrow\; (a+b)^2 \;\geq\; 4ab\,.$$

Como ambos os membros da inequação são positivos, então extraindo-se a raiz quadrada em ambos os membros, obtemos

$$\sqrt{(a+b)^2} \;\geq\; \sqrt{4ab} \;\Rightarrow\; \frac{a+b}{2} \;\geq\; \sqrt{ab}\,.$$

Portanto,

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \qquad \blacksquare$$

9) Mostre que se $x < y$ então $x < \dfrac{x+y}{2} < y$.

Demonstração. De fato, somando-se x em ambos os lados da inequação $x < y$ segue que

$$x + x < x + y \Rightarrow 2x < x + y \implies x < \frac{x+y}{2}. \tag{7.17}$$

Por outro lado, realizando a mesma operação, agora com y tem-se

$$x + y < y + y \;\Rightarrow\; x + y < 2y \;\Rightarrow\; \frac{x+y}{2} < y. \tag{7.18}$$

Portanto, observando-se os resultados (7.17) e (7.18) segue que

$$x < \frac{x+y}{2} < y \qquad \blacksquare$$

7.2.7 Exercícios Propostos

Determine o conjunto solução das seguintes inequações

(1) $(x^2 - 4x - 5)(-x^2 + 8x - 15) \geq 0$

(2) $\dfrac{-x^2 + 2x - 6}{3x - 2} \leq 0$

(3) $\dfrac{x^2 - 5x - 6}{-x^2 + 25} \geq 0$

(4) $\dfrac{(1 - x)(x^2 - 4)}{2x - 1} \geq 0$

(5) $\dfrac{2}{1 - x} \leq 1$

(6) $\dfrac{5x - 3}{3x - 4} \geq -1$

(7) $x^3 - 3x^2 + 2x \leq 0$

(8) $\dfrac{3 + x^2}{3 - x^2} \leq \dfrac{1 + x}{1 - x}$

(9) $|3x + 5| \leq 11$

(10) $\left|2x + \dfrac{3}{2}\right| > 6$

(11) $\left|\dfrac{x - 2}{x - 1}\right| < 3$

(12) $|x^2 - 5x| > 6$

(13) $|4x + 2| > -5x + 7$

(14) $|2x^2 - 8| \leq 2x^2 - 4$

(15) $|x^2 + x| + |x + 1| \geq 2x - 2$

Referências Bibliográficas

[1]. ANTON H.. ***Cálculo***; v.1. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

[2]. BOYCE W. E.; DIPRIMA R. C.. ***Elementary Differencial Equations***; 5. ed. New York: John Wiley, 1991.

[3]. BOYER C. B.. ***A História da Matemática***; 2. ed. New York: John Wiley, 1991.

[4]. EDWARDS C. H.; PENNEY D. E.. ***Cálculo com Geometria Analítica***; 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Prentice-Hall do Brasil Ltda, 1997.

[5]. FLEMING, D.; BUSS, M. G.. ***Cálculo A***; 5. ed. Florianópolis: UFSC, 1992.

[6]. GUIDORIZZI, L.H.. ***Um Curso de Cálculo***; v.1.. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Ltda., 1987.

[7]. LEITHOLD, L.. ***Cálculo com Geometria Analítica***; v.1., 3 ed. Editora Harbra, 1994.

[8]. THOMAS G; FINNEY R.; WEIR M. D.; GIORDANO F. R.. ***Cálculo***; v.1. São Paulo: Prentice-Hall, 2002.

Esta obra foi impressa pela Imprensa Universitária da Universidade Federal de Ouro Preto,
composta na fonte Myriad-Pro e Ottawa e Times New Roman,
em papel 100% reciclado, (capa) 380 g/m^2 e (miolo) 90 g/m^2,
em fevereiro/2014.

JOÃO LUIZ MARTINS

Formado em Matemática com mestrado em Matemática Pura e Aplicada pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e com Doutorado em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). É professor efetivo da Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) desde 1992, quando foi aprovado em concurso para lecionar no Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Biológicas (ICEB). Desde então, já lecionou para diversos cursos tais como: Física, Química, Ciências Biológicas. Matemática e as Engenharias.

No setor administrativo, atuou primeiro como Chefe do Departamento de Matemática, quando foi eleito democraticamente. Em 2001, foi eleito diretor do ICEB. Em 2004, candidatou-se com o seu colega, Antenor Rodrigues Barbosa Júnior ao cargo da Reitoria da UFOP, tomando posse em 2005.

ISBN 978-85-288-0336-5
9 788528 803365