Kleber Carlos Ribeiro Pinto

Aprendendo a decidir com a pesquisa operacional

modelos e métodos de apoio à decisão

2ª edição

EDUFU

Aprendendo a decidir com a Pesquisa Operacional

Modelos e métodos de apoio à decisão

UFU Universidade Federal de Uberlândia

EDUFU
Editora da Universidade Federal de Uberlândia
www.edufu.ufu.br

Av. João Naves de Ávila, 2121
Campus Santa Mônica - Bloco 1S
Cep 38408-100 | Uberlândia - MG
Tel: (34) 3239-4293

Equipe de realização

Editora de publicações	Maria Amália Rocha
Coordenadora de revisão	Lúcia Helena Coimbra Amaral
Revisão	Carina Diniz Nascimento
Revisão ABNT	Maira Nani França
Capa e diagramação	Izabel Bujacher

Kleber Carlos Ribeiro Pinto

Aprendendo a decidir com a Pesquisa Operacional

Modelos e métodos de apoio à decisão

2ª edição

1ª reimpressão

EDUFU

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

P659a Pinto, Kleber Carlos Ribeiro.
Aprendendo a decidir com a pesquisa operacional / Kleber Carlos Ribeiro Pinto. - 2. ed. - Uberlândia : EDUFU, 2008.
164 p. : il.

Inclui bibliografia.
ISBN 978-85-7078-174-1

1. Pesquisa operacional. 2. Programação linear. 3. Teoria das filas. 4. Árvores de decisão. I. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Bibliotecas da UFU / Setor de Catalogação e Classificação

UFU Universidade Federal de Uberlândia

EDUFU
Editora da Universidade Federal de Uberlândia
www.edufu.ufu.br

Av. João Naves de Ávila, 2121
Campus Santa Mônica - Bloco 1S
Cep 38408-100 | Uberlândia - MG
Tel: (34) 3239-4293

Sumário

Apresentação da segunda edição

Esta segunda edição de *Aprendendo a decidir com a Pesquisa Operacional* é resultado da minha experiência como docente na disciplina Pesquisa Operacional nos cursos de graduação e especialização em Administração da UFU – Universidade Federal de Uberlândia.

A Pesquisa Operacional (PO) está presente em cursos de graduação, especialização, mestrado e doutorado em Administração, Engenharia de Produção, Engenharia de Transportes, Ciências Econômicas, Engenharia Agronômica, Ciência da Computação, Análise de Sistemas, Estatística e Matemática. A PO proporciona ao analista, oriundo de diferentes áreas do conhecimento, uma maneira estruturada e sistemática de encontrar soluções para os problemas dos sistemas produtivos, sejam eles relacionados ao planejamento, execução ou controle das operações.

O objetivo principal deste livro é oferecer, ao aluno, um aprendizado referente aos princípios da PO e algumas de suas técnicas, permitindo-lhe que encontre soluções para uma série de problemas relacionados a sistemas produtivos.

Este livro está organizado em quatro partes: preliminares da Pesquisa Operacional; programação linear; análise de decisão probabilística e teoria das filas.

A primeira parte apresenta um breve histórico da disciplina e conceitos que permitem ao leitor a compreensão dos princípios da PO.

A segunda parte – programação linear – apresenta a elaboração de modelos de programação linear e os métodos de solução. Os modelos aqui apresentados representam os problemas de sistemas de produção de diferentes classes: alocação de recursos, composição do produto, composição do mix de produção, programação da produção, além do problema clássico de transporte. Os métodos apresentados para dar solução aos problemas são: o Gráfico, o Simplex e métodos específicos para dar solução ao problema clássico do transporte. Esses métodos constituem-se em procedimentos algébricos e de iterações inerentes aos *softwares* de otimização ou quase otimização. Como instrumento computacional, esta segunda edição apresenta o uso da linguagem de Modelagem Gams a um exemplo de otimização das operações de uma empresa de transporte aéreo.

A terceira parte – análise de decisão probabilística – inclui procedimentos estatísticos para dar solução a problemas que envolvam estimativas futuras de mercado, incluindo a técnica de elaboração e análise dos problemas de árvore de decisão.

A quarta parte – a teoria das filas – trata dos métodos para indicar soluções aos problemas relacionados aos sistemas de filas.

Este livro é dirigido aos alunos das disciplinas Pesquisa Operacional e Métodos Quantitativos dos cursos de graduação em Administração, Ciência da Computação, Engenharia de Produção e Economia Agrícola, e dos cursos de Pós-Graduação em Gestão de Produção e Gestão Logística.

Uberlândia, 15 de janeiro de 2008

O autor

Capítulo 1

Preliminares da pesquisa operacional

Neste capítulo serão apresentados: (1) histórico da Pesquisa Operacional (PO); (2) conceitos de sistema, sintoma, diagnóstico, problema e modelo; (3) conceitos de método e técnica científica; (4) definição de Pesquisa Operacional; (5) enfoques da PO; (6) Pesquisa Operacional e decisão; (7) fases de um estudo de PO; (8) exercícios e referências.

Este capítulo tem como objetivos a apresentação do assunto Pesquisa Operacional e a introdução do pensamento científico para que o leitor proceda a análise de um problema.

1. Histórico da pesquisa operacional

O nome Pesquisa Operacional (PO) tem a sua origem nas Forças Armadas do Reino Unido, onde, entre 1939 e 1940, pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento formaram pequenas equipes destinadas a dar apoio ao Comando das Operações Militares, obtendo êxito em vários de seus estudos, que receberam a denominação de Equipes de Pesquisa de Operações (*Operations Research*).

Após a Segunda Guerra Mundial, a PO desenvolveu-se no setor industrial da Grã-Bretanha e em organizações militares e civis dos Estados Unidos, onde, desde 1950, as indústrias passaram a utilizar as técnicas da PO para o apoio à decisão.

Desde a primeira Revolução Industrial, com o advento da fábrica, o ambiente empresarial vem substituindo o homem pela máquina como fonte de energia. Por outro lado, os governos promoveram o desenvolvimento de sistemas nacionais de transporte e comunicação. Em consequência, as organizações empresariais e de Estado, tornaram-se mais complexas e de difícil gestão.

Particularmente, nas empresas, tornou-se necessária a subdivisão em setores correspondentes às atividades de produção, comercialização; finanças e pessoal, e a função de direção, que teve de estabelecer os objetivos e definir medidas de avaliação do desempenho das unidades de organização para poder minimizar os efeitos dos respectivos interesses, que quase sempre são conflituosos.

Os problemas advindos desta complexidade conduziram a administração industrial a compreender que os consultores em administração, que não se baseavam nem na ciência, nem na pesquisa científica, não eram suficientes para resolver os seus problemas. Então passaram a ceder espaço para os analistas de Pesquisa Operacional, que empregam os princípios da pesquisa científica para elaborar os estudos de apoio ao dirigente.

No Brasil, a PO ainda é pouco difundida no meio empresarial, restringindo-se, até recentemente, às empresas estatais e às grandes empresas privadas. No entanto, a sua importância vem sendo percebida por muitas organizações, e a tendência é o crescimento, principalmente devido à expansão da informática.

Atualmente, vários *softwares* de programação linear, programação linear inteira, programação linear inteira-mista, programação zero-um e programação não-linear estão disponíveis no mercado.[1]

2. CONCEITOS DE SISTEMA, SINTOMA, DIAGNÓSTICO, PROBLEMA E MODELO

Sistema é o conjunto de elementos inter-relacionados entre si, devidamente ordenados e estruturados para cumprir com um objetivo traçado.

Sintoma é o fato que indica a existência de alguma irregularidade no funcionamento do sistema, o que compromete o alcance dos seus objetivos. O sintoma pode ser aparente ou oculto para um determinado analista, porém para outro pode ser só aparente. Assim, a percepção do sintoma depende da habilidade do analista.

Diagnóstico é o quadro da situação do sistema em um determinado momento, ou do subsistema (objeto de estudo), que ilustra e permite ponderar a dimensão do sintoma (ou dos sintomas), bem como a correlação entre diferentes sintomas.

Problema é o que provoca a irregularidade no funcionamento do sistema. Quando o problema é identificado, o analista sabe o que deve ser resolvido. Identifica as variáveis mais

---

[1] Sites para busca sobre *software* de Programação Linear:
[PROGRAMAÇÃO linear]. Disponível em: <http://www.ampl.com/>. Acesso em: 15 mar. 2008.
GAMS. Washington, 2007. Disponível em: <http://www.gams.com/>. Acesso em: 15 mar. 2008.
ILOG CPLEX. Disponível em: <http://www.cplex.com/>. Acesso em: 15 mar. 2008.
AIMMS. Disponível em: <http://www.aimms.com/>. Acesso em: 15 mar. 2008.

significativas e as menos significativas, despreza as últimas e considera as primeiras para elaborar o modelo.

O modelo se traduz em uma representação simplificada do problema, considerando apenas as variáveis significativas. Elaborado o modelo, o analista pode resolver o problema usando um método conhecido, ou desenvolver cientificamente um novo método que ofereça uma solução.

3. Conceitos de método e técnica científica

No âmbito do planejamento, o método científico é a sistematização de técnicas científicas, que ao serem executadas em um determinado objeto, concreto ou abstrato, procura alcançar o resultado desejado, condizente com o objetivo esperado para o sistema.

Técnica é o processo que permite produzir, parcialmente ou por completo, certo objeto, tangível ou intangível. Logo, a técnica científica é o processo que, merecido uma análise científica, é devidamente justificado. Além disso, leva à construção do objeto, concreto ou abstrato, ou permite ao analista conhecer determinada realidade que o proporcione fazer com que um determinado sistema cumpra o seu objetivo.

A técnica científica consiste na execução do método científico, utilizando-se de conceitos e tecnologias para dar termo aos procedimentos traçados e alcançar efetivamente o objetivo desejado.

Exemplo 1.1 – A produção de mandiocas

Um sistema de produção de mandiocas tem como objetivo atender a demanda de uma fábrica de farinha (poderia ser de ração ou para o consumo do produto *in-natura*). O sistema de produção exige o preparo do solo, o plantio e a colheita.

Recorrendo-se ao plantio como exemplo para compreender os conceitos de técnica e técnica científica, sabe-se que ele é realizado por meio da implantação no solo de pedaços da rama (tubérculo ou maniva), obtidos de diferentes técnicas de corte. Uma dessas baseia-se no corte da maniva utilizando-se de pequenas forquilhas de madeira, em que o tubérculo é apoiado e submetido a golpes de facão. Outra técnica utiliza-se de uma tora ou toco de árvore na qual o tubérculo é apoiado e submetido a golpes de facão.

Na primeira técnica evita-se o esmagamento do nó, na última, a probabilidade disso ocorrer é maior, pois o número de brotos potencialmente capazes de prosperar no plantio é menor. Se estas técnicas de corte são praticadas de maneira isolada, sem justificativas e sem a compreensão do objetivo do sistema, essas são apenas técnicas, mas se alguma técnica de corte é vista como um processo necessário para atingir o objetivo de um sistema de produção de mandioca e é desenvolvida tendo como bases justificativas científicas, então ela é uma técnica científica.

4. Definição de pesquisa operacional

A PO diz respeito à alocação eficiente de recursos escassos. É tanto arte como uma ciência. A arte reside na habilidade de exprimir os conceitos de eficiente e de escasso por meio de um modelo matemático representativo de uma determinada situação. A ciência consiste na dedução de métodos para solucionar tais modelos, que para agilizar a solução dos problemas, torna-se indispensável o uso do computador.

Ainda sobre a definição de PO, Taha (2008) afirma:

> Como uma ferramenta de tomada de decisões, PO é uma ciência e também uma arte. É uma ciência em virtude das técnicas matemáticas que incorpora e é uma arte porque o sucesso das fases que resultam na solução do modelo matemático depende em grande parte da criatividade e da experiência da equipe de pesquisa operacional.

Segundo Kimbal e Marse (1951), "a Pesquisa Operacional é um método científico de prover setores executivos com uma base quantitativa para decisões relativas às operações sob o seu controle".

Em síntese, a PO consta de um conjunto de técnicas científicas que auxilia o tomador de decisões, orientando-o para a otimização dos sistemas que gerencia. A PO tem como premissa a ação interdisciplinar, que concilia conhecimentos de diferentes áreas.

A prática da Pesquisa Operacional consiste na aplicação de métodos a modelos que representam problemas que dizem respeito ao funcionamento de um sistema. O uso de técnicas científicas, na análise das relações e funções de um sistema, tem o propósito de determinar, quantitativamente, as condições em que serão obtidos os melhores resultados. A PO viabiliza o controle e a conquista de soluções ótimas ou as melhores possíveis pelo tomador de decisões.

Classificação dos métodos da Pesquisa Operacional

A aplicação de um método para a resolução de um problema pressupõe a identificação e a modelagem do problema. Os métodos científicos da PO podem ser compreendidos em duas categorias: métodos probabilísticos e métodos determinísticos. Os probabilísticos a serem tratados neste texto são: análise de decisão bayesiana, processos markovianos, árvore de decisão, teoria das filas e simulação Monte Carlo.

Quanto aos métodos determinísticos, serão apresentados: o método gráfico de fluxo, acumulado para a análise de problemas de filas, e quatro métodos da programação linear: gráfico, simplex única fase, simplex duas fases e o método do transporte. Para a solução de problemas de programação sugere-se o uso da linguagem de modelagem GAMS – *General Algebraic Modeling System* – (Brooke; Kendrick; Meeraus, 1992).

5. ENFOQUES DA PESQUISA OPERACIONAL

A Pesquisa Operacional pode ser desenvolvida sob dois enfoques: o quantitativo e o gerencial.

O enfoque quantitativo é um campo atrativo para os matemáticos, cientistas da computação, engenheiros e físicos, principalmente dedicados à pesquisa, pois requer do profissional o domínio de métodos quantitativos. É importante porque busca o desenvolvimento de novos métodos matemáticos que, auxiliados por uma ferramenta computacional, poderão dar soluções a problemas ainda não contemplados pela literatura ou oferecer procedimentos mais ágeis para a solução de problemas nela tratados. Os profissionais com esse enfoque são vanguardas do conhecimento da PO.

O enfoque gerencial trata da utilização dos conceitos científicos da Pesquisa Operacional para resolver os problemas de tomada de decisão pelo do processo de modelagem e aplicação de um método para obter a solução.

O processo de modelagem deve considerar as seguintes etapas: (1) a compreensão do problema a ser modelado; (2) a identificação das variáveis de decisão que correspondem às incógnitas do problema; (3) a definição do modelo ou a escolha de um modelo específico, que pode ser expresso na forma de croqui, esquema ou relações matemáticas.

Um modelo matemático quase sempre não consegue captar todas as variáveis de um problema real, mas possibilita tratar as variáveis mais importantes para a tomada de decisão.

A aplicação do método científico pode ser feita pela da escolha dos participantes de um ou mais métodos, dentre os existentes. Frequentemente esta aplicação exige cálculos manuais ou a utilização de um *software* que incorpora o método. Para completar o estudo, a solução do modelo que representa a solução do problema, obtida com a aplicação do método, precisa passar por uma análise sobre a sua aplicabilidade ao caso real, a fim de identificar a possibilidade de ser efetivada.

6. Pesquisa operacional e decisão

Decisão: aspectos conceituais

Decisão é o resultado de um processo de análise sobre um problema, que preliminarmente transparece possuir várias alternativas de solução com viabilidades ainda duvidosas, mas que após a análise, escolhe-se a melhor. Decisão é um curso de ação escolhido por uma pessoa ou grupo, considerado o meio mais efetivo dentre aqueles que estão à sua disposição para atingir os objetivos desejados. Decisão é o marco para o desencadeamento de ações que visam atingir o objetivo desejado na resolução do problema.

Para o interesse gerencial, as seguintes características do processo de decisão são importantes:

a. a decisão tem um processo sequencial;
b. o processo é complexo;
c. o processo envolve valores subjetivos;
d. o processo se desenvolve através de regras institucionais.

O processo de decisão é sequencial, pois uma série de fatos cria bases para se chegar ao resultado. Além disso, é complexo, porque as informações disponíveis são quase sempre insuficientes e por isso o analista de PO depende: das relações interpessoais para obter as informações complementares, da importância do seu cargo, da sua ética e da sua moral. Outro elemento de complexidade é a dificuldade em conseguir os dados dos agentes que estão sujeitos a participar dos efeitos da decisão, pois as pessoas ou responsáveis pelos setores da organização possuem interesses divergentes.

O processo de decisão envolve valores subjetivos; porque o tomador de decisões assume as responsabilidades pelos efeitos da decisão, e também considera os fatores intuitivos provenientes da experiência pessoal e da sua personalidade. Com isso, se desenvolve através de regras institucionais, em razão de a organização possuir em sua estrutura uma escala hierárquica que tem o seu funcionamento regulado por normas e procedimentos.

CLASSIFICAÇÃO DAS DECISÕES

As decisões podem ser classificadas segundo o nível de importância ou segundo o grau de estruturação dos problemas:

Com relação à importância, as decisões podem ser interpretadas sob três classes: estratégica, tática e operacional. Os critérios para esta classificação são o alcance, a extensão e a orientação da decisão. O alcance refere-se à duração dos efeitos da decisão: quanto mais longa, mais estratégica, quanto mais curta, mais operacional. A extensão indica a abrangência da decisão na organização: quanto maior a influência no seu orçamento, mais estratégica, quanto menor, mais operacional. A orientação ao grau de interferência da decisão nas metas e objetivos da organização. Havendo a necessidade de redefinição das metas e objetivos, a decisão será estratégica, se ela apenas visa cumprir etapas de médio prazo já definidas, então será tática, se viabiliza as operações corriqueiras, a decisão será operacional.

O grau de estruturação dos problemas remete à certeza quanto aos resultados da decisão, assim, os problemas operacionais tendem a ser de mais alto grau de estruturação que os problemas estratégicos. Isso porque as consequências de uma decisão operacional são mais previsíveis do que as de uma decisão estratégica. A administração dos estoques, um problema tático-operacional, tem um alto grau de estruturação, pois é possível identificar as alterações de estoque em cada item e prever as respectivas reposições. O lançamento de um novo produto no mercado, como um problema estratégico, tem um baixo grau de estruturação, no entanto, não é possível prever, com alto grau de certeza, qual será o impacto do novo produto sobre o consumidor.

DECISÃO RACIONAL: OBJETIVO DA PO

O interesse do profissional de Pesquisa Operacional, o analista de PO, é chegar a uma decisão racional.

Uma decisão é racional quando:

→ os resultados satisfazem os interesses dos envolvidos com a decisão;
→ os meios disponíveis são aproveitados para contemplar os objetivos pretendidos;
→ o curso das ações táticas ou operacionais é consistente com o plano estabelecido para o longo prazo;
→ são avaliados os requisitos para a execução da decisão, bem como suas consequências a curto, médio e longo prazo.

No entanto, vários fatores podem ser obstáculos a uma decisão racional:

1. falta da identificação correta do problema;
2. desconhecimento de determinadas alternativas possíveis para a solução;
3. desconhecimento de determinadas restrições à solução do problema;
4. necessidade de envolvimento de uma grande quantidade de pessoas ou órgãos;
5. urgência na tomada de decisões, que impede a busca das informações necessárias para assegurar uma boa decisão;
6. desconhecimento da política econômica do governo federal ou de políticas de desenvolvimento de governos estadual e municipal.

Identificação do problema

A identificação do problema e o conhecimento completo das alternativas possíveis são dois importantes requisitos para balizar uma decisão racional. O problema precisa ser identificado juntamente com o objeto de estudo a ele relacionado e a observação dos sintomas deve ser feita por meio da elaboração do diagnóstico. Essas ações são os passos iniciais para o analista chegar ao objeto de estudo e ao problema.

Sintoma: condição para a existência do problema

A percepção das irregularidades no funcionamento do sistema (sintomas aparentes) indica a existência de problemas no sistema, uma vez que este não cumpre completamente com os seus objetivos. Assim, os problemas originam-se com o surgimento de sintomas indesejáveis. Para reduzir ou eliminar essas irregularidades, os tomadores de decisão necessitam refletir sobre o sistema, identificar o objeto de estudo e o problema, levantar as possibilidades de solução e escolher, dentre um conjunto de duas ou mais alternativas de solução, aquela que for a mais adequada. Para isso é indispensável traçar o diagnóstico.

Diagnóstico

A identificação correta do problema é o pressuposto para que um estudo de PO tenha sucesso. Os sintomas aparentes apontam alguma anormalidade em um determinado sistema, no entanto, para realizar o diagnóstico, o analista necessita levantar também os sintomas ocultos. Sendo possível, o diagnóstico deve constar de medidas quantitativas que possam dimensionar a gravidade dos sintomas e contribuir para identificar as reais causas das anormalidades do sistema.

Para encontrar o problema certo, o analista precisa definir o seu objeto de estudo, delineando as fronteiras de investigação.

Exemplo 1.2 – Automóvel falhando

Admita que o seu automóvel de passeio à gasolina esteja falhando quando você acelera, esse é apenas um sintoma aparente. Mas, existem outros sintomas?

O problema poderá ser identificado com as questões: Quais são as peças que, estando defeituosas, poderão provocar a falha do automóvel enquanto é acelerado? Quais poderiam ser as causas das anormalidades no seu veículo? Quais são os recursos que você dispõe para resolver o problema?

É hora de fazer um bom diagnóstico do sistema automóvel para evitar gastos demasiados. Será necessário investigar a qualidade do combustível, o estado do filtro de combustível, do carburador, da bomba de combustível, da bobina, das velas, dos cabos do sistema elétrico, da caixa de distribuição e dos seus componentes. Considerando o diagnóstico, você irá analisar os recursos disponíveis e estabelecer as prioridades a serem resolvidas.

Analogamente, se o desempenho da área de produção de uma empresa está fraco, quais são os sintomas? Em quais dimensões se encontram? Quais são as causas desses sintomas? O suprimento é deficiente? Está havendo má utilização da matéria-prima? Os equipamentos estão obsoletos? A manutenção está inadequada? O pessoal encontra-se desmotivado? Falta treinamento aos funcionários?

Encontrar a questão certa para ser resolvida é o marco principal para o tomador de decisão ter sucesso na busca de um caminho adequado para resolver o problema.

Conhecimento completo das alternativas possíveis

O conhecimento completo das alternativas possíveis é tanto importante quanto difícil, pois além de saber quais são elas é preciso avaliar as suas consequências.

Exemplo 1.3 – Reflexão no processo de decisão

Referindo-se ao exemplo 1.2: se o problema está nas velas do automóvel, o que poderá ser feito? Troca ou limpeza das velas? A limpeza pode resolver o problema imediato, mas a solução pode não ser duradoura, em contrapartida, a troca das velas será mais onerosa.

Analogamente, se a manutenção dos equipamentos de produção for a necessidade imediata, melhorá-la pode ser um caminho, mas se estes equipamentos já são desgastados, tal solução poderá não ser duradoura e em breve terão que ser substituídos. Por que não substituí-los de imediato? Onde conseguir os recursos financeiros para tal? Qual deverá ser a tecnologia a adotar? Quais serão as consequências da inovação tecnológica?

7. FASES DE UM ESTUDO DE PESQUISA OPERACIONAL

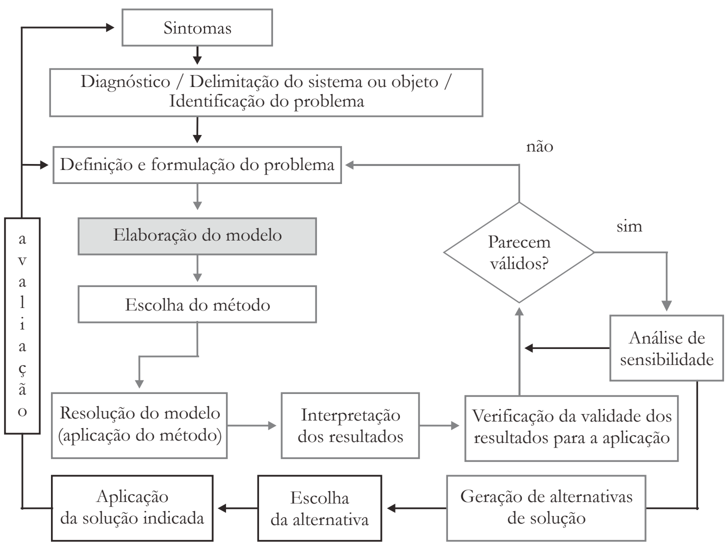
Segundo Andrade (1990), as fases de um estudo de PO dependem do tipo de problema e do ambiente que o envolve, mas determinados passos são básicos para a realização de um estudo de PO: definição do problema, construção do modelo, solução do modelo, validação do modelo, aplicação da solução indicada e avaliação. Dentre as fases citadas pelo autor não consta a escolha do método para a solução do problema, mas esta é fundamental e não deve ser excluída de um estudo de PO.

As doze fases mostradas na FIG. 1.1 e abaixo especificadas permitem uma melhor compreensão da PO:

- delimitação do sistema a ser analisado e observação dos sintomas;
- elaboração do diagnóstico do sistema e identificação do problema;
- definição e formulação do problema;
- construção do modelo representativo da realidade presente;

- escolha do método de solução ou de uma nova concepção de modelo;
- resolução do problema modelado;
- interpretação dos resultados;
- validação do modelo ou reformulação do problema com a construção de um novo modelo;
- resolução do novo problema;
- análise de sensibilidade e interpretação dos resultados para a geração de alternativas de decisão;
- escolha da melhor alternativa;
- aplicação da solução indicada e avaliação dos resultados.

Fig. 1.1 – Fases de um estudo de Pesquisa Operacional



Exemplo 1.4 – Os problemas em um sistema de transporte urbano.

Uma cidade, de porte médio, sofreu uma troca de sistemas de transporte coletivo, mudou de um sistema de transporte convencional para o Sistema Integrado de Transporte urbano (SIT).

No sistema convencional predominavam as linhas de ônibus do tipo bairro-centro-bairro e algumas linhas entre bairros. No SIT constam: um terminal central, quatro terminais periféricos (TP1, TP2, TP3 e TP4), linhas alimentadoras/distribuidoras, linhas troncais e linhas entre terminais periféricos. As linhas alimentadoras/distribuidoras ligam vários pontos de cada bairro a um dos quatro terminais periféricos (V, X, Y e Z) e vice-versa, e as linhas troncais ligam os terminais periféricos ao terminal central (TC), localizado na área de maior densidade habitacional e de alta concentração de atividades comerciais, e vice-versa.

A tarifa é cobrada apenas uma vez por viagem, oferecendo ao usuário a oportunidade de transferir-se de uma linha para a outra sem ter de pagar, porém essa transferência somente ocorre em alguns dos cinco terminais do sistema.

O terminal central está localizado na quadra situada entre as avenidas JNA (João Naves de Ávila), JP (João Pinheiro), JP (João Pessoa) e AP (Afonso Pena). Ao lado da avenida JPO encontra-se uma praça que ocupa duas quadras completas e ao lado da avenida AP encontra-se o fórum do poder judiciário, com a sua frente para a avenida FP (Fernando Pessoa), paralela à avenida AP. As FIG. 1.2 e 1.3 mostram os croquis do sistema de transportes de dos arredores do TC, incluindo as direções de tráfego de veículos (→).

FIGURA 1.2 - Croqui do sistema de transportes da cidade de porte médio

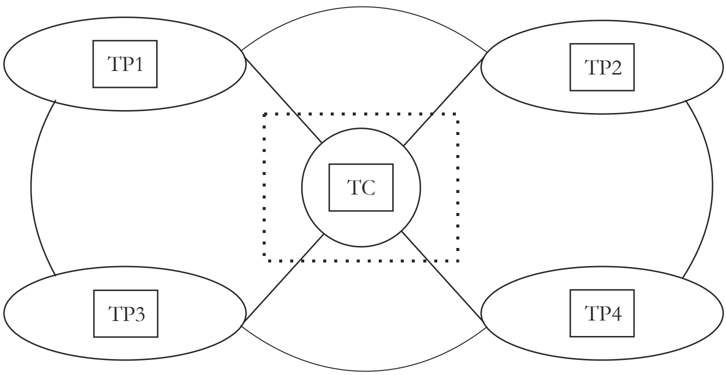
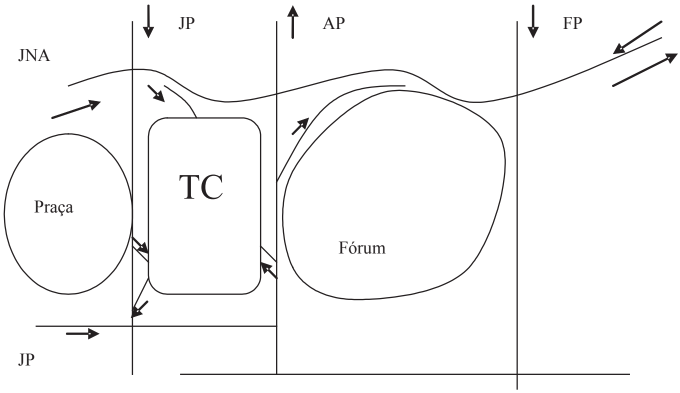


FIGURA 1.3 - Croqui dos arredores do terminal central (TC)



Fase 1

Qual seria o sistema e qual deveria ser o seu objetivo?

Há de se pressupor que um sistema de transporte urbano tem como objetivos a facilitação e a agilização dos deslocamentos dos usuários, sejam eles os passageiros dos veículos coletivos ou dos próprios. Assim, é razoável que se escolha o transporte em toda a malha urbana como o sistema a ser analisado.

Qual seria o objeto de estudo?

Sabendo que o transporte coletivo deve ter prioridade no uso do espaço urbano, principalmente por deslocar maior número de usuários por metro quadrado de via, o objeto preferencial de estudo deveria ser o Sistema Integrado de Transporte Urbano, entretanto ele pode ser mais restrito se o interesse for mais específico, por exemplo, o terminal central e os seus arredores. Isso dependeráda observação dos analistas sobre os sintomas.

Quais seriam os problemas?

O que parece ser problema para um analista, pode não ser para o outro, nesse caso algumas hipóteses de problemas são listadas: programação inadequada de horário de ônibus, semáforos não sincronizados, pistas estreitas, localização inadequada de terminais de ônibus. No entanto, muitas outras hipóteses podem ser levantadas.

• Identificação dos sintomas

a) Tempo de viagem aumentado;

b) dificuldades no carregamento de compras realizadas no centro da cidade enquanto passa por escadas e corredores do terminal central;

c) conflitos entre movimentos de usuários dos ônibus e usuários do comércio situado no pavimento superior;

d) dificuldades em vencer roletas e escadas para subir ao pavimento superior onde se situam guichês de venda de passes e as roletas de controle (situadas no mesmo pavimento do comércio);

e) dificuldades em descer escadas para acesso às plataformas de ônibus;

f) demora excessiva na fila para esperar pelo ônibus;

g) existência de conflitos de trânsito nos arredores do terminal em virtude de um estacionamento para automóveis no seu terceiro pavimento destinados aos comerciantes, comerciários e clientes do comércio situado no terminal central e em seus arredores;

h) congestionamentos e conflitos de trânsito nos cruzamentos periféricos ao terminal central;

i) disputa entre automóveis e ônibus intermunicipais pelo uso dos espaços de estacionamento situados em praças próximas ao terminal;

j) conflitos entre ônibus e automóveis nas faixas de acesso ao terminal e às vias do seu entorno;

k) existência de obstáculos permanentes na área de influência do terminal: o terminal central tem à sua frente, pela

Avenida AP, o prédio do fórum da cidade, que ocupa uma quadra toda e dispõe de um estacionamento exclusivo aos seus usuários. Paralela à Avenida AP está a Avenida FP que se encontra à frente do fórum. Para cruzar a esquina da Avenida FP com a Avenida JNA, um automóvel necessita aguardar três trocas de sinais do semáforo, provocando uma fila que intercepta os dois cruzamentos a montante;

l) falta de sincronismo entre o sentido dos fluxos nas vias que circundam o terminal central e a posição das portas dos ônibus, aliada à proibição do uso das calçadas que rodeiam o terminal: os ônibus têm portas de acesso somente na lateral direita, mas os fluxos das avenidas, que circulam o terminal central, seguem rigorosamente o sentido anti-horário.

• Análise dos sintomas

A análise dos sintomas depende fundamentalmente do perfil do analista, pois o sintoma mais importante para um analista pode não ser para outro. Contudo, como se pressupõe que a análise não deva ser feita por um único indivíduo, é preciso que se considere o resultado de uma discussão da equipe de análise, de forma que essa priorize os sintomas mais importantes para desenvolver a análise sobre eles e desconsiderar os demais.

Fases 2 a 7

• Diagnóstico, problema, modelo e método

O diagnóstico completo envolveria uma pesquisa do número de passageiros por linha, da quantidade de assentos ofertados por trecho e das reclamações. Esses dados poderia (ou não) indicar ponderações significativas de perda de tempo do usuário, constituindo-se no diagnóstico. Em caso afirmativo, esse diagnóstico indicaria que a mudança para o novo modelo SIT não teria contemplado o objetivo do sistema (agilidade), mostrando que ainda existem problemas. Quais seriam eles? Como resolvê-los? A equipe de analistas deveria reformular o problema, remodelar o problema, rever o sistema e criar novas propostas (métodos que dêem solução aos problemas).

Fases 8 a 12

• Validação, análise de sensibilidade, geração de alternativas e avaliação

A validação e a análise de sensibilidade são etapas interdependentes, consistem em simular situações hipotéticas de operações do modelo, o que significa testá-lo. Seriam essas simulações que indicariam a validade do modelo escolhido. Convencido dessa validade, surgem as expectativas de sucesso com a aplicação da solução proposta. A apresentação da proposta ao responsável pela decisão deve considerar as defesas e sucessos prováveis com a aplicação, bem como as considerações sobre as restrições, que podem levar o tomador de decisões às dificuldades na implantação do modelo.

8. EXERCÍCIOS

1. Quais razões levaram a PO a ser considerada importante para a tomada de decisões nas organizações industriais? Explique com suas palavras.
2. Com as suas palavras, distinga os termos técnica, método e técnica científica e escreva sobre modelo, problema, diagnóstico, sistema e objeto de estudo.
3. O que é e em que consiste a prática da PO?

4. Quais são as características de um processo de decisão?
5. Exemplifique casos de problemas de decisão e classifique as decisões em estratégica, tática ou operacional.
6. O que é uma decisão racional?
7. Quais são os enfoques da PO? Explique.
8. Trabalhando em grupo de três alunos, faça um croqui representativo do problema exposto no exemplo 1.4 e discuta, em detalhes, as soluções apontadas pelos seus componentes. Faça um relatório sobre o problema e as soluções escolhidas pelo grupo. Considere os comentários favoráveis e os fatores restritivos às soluções indicadas em uma análise final.

REFERÊNCIAS

ACKOFF, R. L.; SASIENI, M. W. *Pesquisa operacional.* Rio de Janeiro: LTC, 1979.

AIMMS. Disponível em: <http://www.aimms.com/>. Acesso em: 15 mar. 2008.

ANDRADE, E. L. de. *Introdução à pesquisa operacional.* Rio de Janeiro: LTC, 1990.

ANJOS, N. dos. *Metodologia geral.* 2. ed. São Paulo: Edart, 1982.

BRONSON, R. *Pesquisa operacional.* São Paulo: McGraw Hill, 1985.

BROOKE, A.; KENDRICK, D.; MEERAUS, A. *GAMS*: a user's guide (release 2.25). San Francisco: The Scientific Press, 1992.

GAMS. Washington, 2007. Disponível em:<http://www.gams.com/>. Acesso em: 15 mar. 2008.

ILOG CPLEX. Disponível em: <http://www.cplex.com/>. Acesso em: 15 mar. 2008.

KIMBAL, G. E.; MARSE, P. M. *Methods of operations research.* Massachusetts: The Technology Press, 1951.[PROGRAMAÇÃO linear]. Disponível em: <http://www.ampl.com/>. Acesso em: 15 mar. 2008.

TAHA, H. A. *Pesquisa operacional.* São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

Capítulo 2

Programação linear

Neste capítulo serão apresentados: (1) introdução aos problemas de otimização; (2) modelagem de problemas de programação linear: conceitos; (3) o método gráfico; (4) o método simplex; (5) a linguagem de modelagem Gams e a sua aplicação; (6) o problema do transporte; (7) exercícios e referências.

O objetivo é mostrar ao leitor como escrever o modelo matemático de problemas reais dos sistemas produtivos e de transportes na forma de problemas de programação linear, e como resolve-los utilizando os métodos da programação linear e a linguagem de modelagem GAMS.

1. Introdução aos problemas de otimização

Os problemas de otimização podem ser resolvidos por meio dos métodos determinísticos. Esses são classificados por Novaes (1978) em indiretos e diretos. Os primeiros constituem-se em procedimentos que exigem o cálculo de pontos mínimo e máximo em uma função não linear, necessitando, às vezes, fazer a comparação entre vários pontos mínimo ou máximo, para se chegar ao ótimo global.

Os métodos diretos constituem-se em procedimentos que buscam o único ótimo para um conjunto de pontos delimitados por funções lineares: as restrições, em que inexistem soluções ótimas localizadas, buscando diretamente a solução para um problema de otimização restrito.

A programação linear (PL) compõe-se de métodos determinísticos diretos otimizantes e é aplicável a problemas restritos de otimização linear. O caráter determinístico de um método de otimização direto pressupõe que o modelo do problema não seja influenciado por fatores probabilísticos. Entretanto, a análise de sensibilidade a partir da variação dos parâmetros do problema pode gerar resultados para diferentes cenários estabelecidos pelo analista de pesquisa operacional, os quais possuem probabilidades distintas de ocorrência, mas que não são inseridos nos métodos específicos de programação linear para a resolução dos problemas.

Os métodos da PL resolvem, dentre vários, os problemas de alocação de recursos, de programação da produção, de composição do produto, de mix de produção e de transportes.

Um método de otimização direto para problemas restritos necessita considerar três premissas estabelecidas pelo modelo representativo do problema: (1) a definição das variáveis de decisão positivas; (2) uma função objetivo, de minimização ou de maximização e (3) um conjunto de restrições composto por equações ou inequações.

Ao elaborar o modelo do problema, o analista de PO procura simplificar o problema real, levando em consideração apenas as variáveis mais relevantes.

A utilidade da aplicação de um método de otimização direto sobre o modelo do problema real está em gerar soluções capazes de indicar uma decisão racional ao dirigente.

Alguns problemas de programação linear (PPL) constituem-se de variáveis de decisão contínuas, outros de variáveis inteiras, outros de contínuas e inteiras e outros de variáveis do tipo zero-um. Grande parte dos problemas reais associa-se às duas primeiras. Os conteúdos conceituais exigidos pelos métodos, que dão solução a qualquer PPL, requerem o conhecimento dos métodos aplicados a problemas de programação linear com variáveis contínuas. Neste texto, serão apresentados alguns problemas que possam ser modelados com variáveis contínuas e com variáveis inteiras.

Quando o problema for de maximização, o objetivo pode ser buscar o máximo lucro, margem de contribuição ou do volume de produção. Quando for de minimização, pode ser o mínimo custo, consumo de recursos, tempo de viagem de uma rede de transporte ou a mínima distância a percorrer nessa rede.

As restrições, como princípio geral, podem ser de suprimento, processamento ou mão-de-obra, de correlações de mercado, de limites do mercado consumidor e de orçamento. As restrições de suprimento apontam os limites das ofertas de insumos. As de processamento podem delimitar a capacidade de equipamentos, de mão-de-obra, as correlações de desempenho dos equipamentos para a produção de diferentes itens e a composição do produto. As restrições de mercado consumidor podem estabelecer limites de vendas para diferentes produtos, bem como correlações entre os volumes de comercialização desses. As restrições de orçamento delimitam a disponibilidade de recursos financeiros para investimentos.

A aplicação de qualquer método de otimização direto a algum PPL exige do analista a escrita do modelo matemático representativo do problema real, ao que se denomina processo de modelagem.

2. Modelagem de problemas de programação linear: conceitos

A identificação do problema deve ser a primeira tarefa do analista de Pesquisa Operacional, por ela é que se definem o enunciado do problema, o conjunto de dados pertinentes, as variáveis relevantes que influenciarão a decisão, o objetivo e as restrições para alcançá-lo.

Os dados necessários para a modelagem de um problema de programação linear relacionados aos problemas produtivos geralmente envolvem: impostos; custo de recursos materiais, de energia, de mão-de-obra, custos de investimentos ou financeiros; disponibilidade dos recursos; limitações de mercado fornecedor ou consumidor; capacidade instalada de produção; quantidades de cada recurso para processar uma unidade de produto; tempos de processamento da matéria-prima para cada produto e preços dos produtos.

A segunda tarefa do analista é a modelagem do problema de PPL. O processo de modelagem consiste na formulação matemática do problema, da função objetivo e das funções de restrição, que passa pela definição das variáveis de decisão.

A função objetivo de um PPL é a expressão matemática linear para a qual se deseja a otimização, geralmente relativo a um período de tempo pertinente, denominado horizonte de planejamento. Nos problemas de gestão da produção, quase sempre ela é de maximização, representando o lucro, a margem de contribuição ou o volume de produção. Nos problemas de transporte predomina a minimização do custo, da distância ou do tempo de viagem. Nos problemas de composição do produto, o interesse pode ser a minimização do custo para produzir uma unidade, ou a maximização dos resultados financeiros que ele pode proporcionar ao processo produtivo em que será utilizado; como exemplo tem-se a composição de rações em granjas de frango e suínos.

Escrito o modelo matemático, o analista deve escolher o método de resolução, aplicá-lo, analisar a resposta e testar a sensibilidade do modelo. Testar a sensibilidade resulta em inferir novos valores aos limitantes das restrições e aos coeficientes das variáveis de decisão, tanto na função objetivo quanto nas restrições, e analisar a nova resposta obtida com a aplicação do método.

Essa análise pode indicar a necessidade de rever o problema, o modelo e às vezes até o método de resolução.

• Modelo genérico de um PPL

Um PPL descrito no formato matemático é demonstrado genericamente pelas equações e inequações (2.1) a (2.3).

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (2.1)$$

ou

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad (2.2)$$

$$b_i \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = Q(x) \rightarrow \acute{o}timo \qquad (2.3)$$

$$i = 1,\ldots,m$$

$$j = 1,\ldots,n$$

A inequação (2.1) representa o conjunto de restrições, a (2.2), a condição de não negatividade para os limitantes das restrições e a equação (2.3), a função objetivo, em que:

x_j = variável de decisão;
a_{ij} = coeficiente de uma variável de decisão em alguma função de restrição;
b_i = fator limitante de alguma restrição;
c_j = coeficiente de uma variável de decisão na função objetivo;
$Q(x)$ = função objetivo que se pretende otimizar;
i = número de restrições;
j = número de variáveis de decisão.

O processo de modelagem não dispõe de uma regra fixa que oriente o analista, por isso a sua compreensão quanto a esse processo passa necessariamente pela resolução de sucessivos problemas.

Tendo como referência os produtos e processos produtivos em sistemas de produção, os PPL podem ser distribuídos em quatro classes: alocação de recursos, composição do produto, composição do mix de produção e programação da produção.

Modelagem de problemas de alocação de recursos

Os problemas de alocação de recursos são comuns nos processos produtivos. Consistem em problemas em que se devem alocar recursos financeiros, materiais ou mão-de-obra a produtos, processos, linhas de produção ou equipamentos. O exemplo 2.1 ilustra essa classe de problemas:

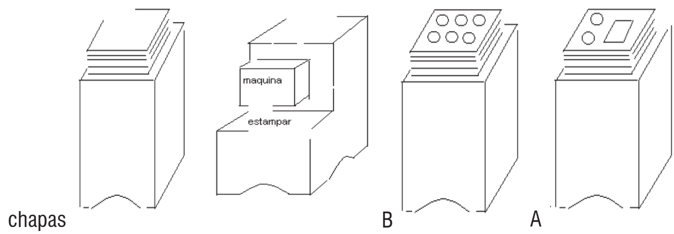
Exemplo 2.1 – Estamparia de saladeiras e pias (adaptado de Ehrlich, 1988, p.37)

Uma estamparia pode fabricar pia de aço inoxidável e/ou saladeiras do mesmo material, chapas de aço de único tamanho. Com cada chapa pode-se estampar uma pia e duas saladeiras ou, então, seis saladeiras. As sobras são economicamente inaproveitáveis. A firma vende cada pia a R$80,00 e cada saladeira a R$25,00. Cada chapa de aço inoxidável custa R$60,00. Os demais custos não interferem na decisão. Considere que a empresa não consegue vender mais do que 4 saladeiras para cada pia vendida. Caso o suprimento consiga um máximo de 680 chapas por mês, quanto a estamparia deveria produzir de cada artigo para ter a máxima margem de contribuição nesse período? Escreva o modelo.

Lógica do processo de modelagem:

a) esquematizar o processo de produção (FIG. 2.1);

FIG 2.1 – Representação do problema da estamparia de pias e saladeiras



b) elaborar o modelo;

O processo de estampagem das chapas pode ser por dois moldes distintos: o que proporciona a produção de 2 saladeiras e uma pia e o que resulta em 6 saladeiras.

Neste problema há relações entre o número de operações de cada processo e o respectivo número de produtos resultantes. Esse fato sugere a necessidade de adotar as variáveis auxiliares.

1ª etapa: identificação das variáveis de decisão e das variáveis auxiliares, quando necessário.

Variáveis de decisão:
x_a = quantidade de chapas que serão processadas com o molde A;
x_b = quantidade de chapas que serão processadas com o molde B.
Variáveis auxiliares:
x_s = quantidade de saladeiras a produzir;
x_p = quantidade de pias a produzir.

Relações entre as variáveis de decisão e as auxiliares:

1) $X_s = 2 \cdot X_a + 6 \cdot X_b$ 2) $X_p = X_a$

2ª etapa: identificação da função objetivo.
Interesse: margem de contribuição mensal → direção maximizar
A função objetivo [$Q(x)$] fica:

$$(2 \cdot 25+80-60) \cdot Xa + (6 \cdot 25-60) \cdot Xb = Q(x) \rightarrow Max!$$

$$70 \cdot X_a + 90 \cdot X_a = Q(x)$$

3ª etapa: identificação das restrições:

$X_a + X_b \leq 680$ (suprimentos, chapas)

$2X_a + 6X_b \leq 4X_a$ (correlação entre os mercados de pias e saladeiras)

$X_a , X_b \geq 0$

Problemas de composição do produto

Consiste em problemas relacionados a compor uma unidade de produto e quase sempre é de minimização do custo unitário total de produção.

Exemplo 2.2 – Problema da dieta

Uma dieta que está sendo preparada pelo restaurante deve ter entre 1.800 e 3.600 calorias, das quais não mais que 1.400 calorias podem ser em amido e não menos que 400 calorias precisam ser em proteínas. Dois são os alimentos disponíveis: brócolis e macarrão. O brócolis custa US$5,00/kg e contém, por quilo, 600 calorias; em que 400 são em proteínas e 200 em amido. O macarrão custa US$1,00/kg e contém, por quilo, 900 calorias; 700 são em amido, 100 em proteínas e 100 em gordura. A escola precisa reduzir ao máximo os seus custos. Como deve compor a dieta para os estudantes? Escreva o modelo.

Elaborando o modelo

Variáveis de decisão:

X_1= quantidade de brócolis a compor a dieta;

X_2 = quantidade de macarrão a compor a dieta.

Função objetivo:

minimizar o custo de uma dieta.

$5{,}0 \cdot X_1 + 1{,}0 \cdot X_2 = Q(X) \rightarrow Mín!$

Restrições:

$200 \cdot X_1 + 700 \cdot X_2 \leq 1400 \rightarrow (amido)$

$400 \cdot X_1 + 100 \cdot X_2 \geq 400 \rightarrow (proteína)$

$600 \cdot X_1 + 900 \cdot X_2 \leq 3600 \rightarrow (calorias \Rightarrow máx)$

$600 \cdot X_1 + 900 \cdot X_2 \geq 1800 \rightarrow (calorias \Rightarrow mín)$

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

Problemas de composição do mix de produção

Esses problemas pretendem colocar em questão, dentre um leque de alternativas, qual será a quantidade de cada produto a ser produzido, ou comercializado, ao longo de um período de tempo.

Exemplo 2.3 – Produção de sorvetes

Qcreme é uma fabricante de dois tipos sorvete: em massa e picolé. O de massa consome 50% a mais de mão-de-obra do que o picolé. Caso a produção fosse exclusivamente de picolé, 40 toneladas diárias seriam produzidas, no entanto, para este, só há mercado para 30 toneladas/dia. No máximo 15 toneladas de sorvete em massa podem ser comercializadas. Programe para obter a máxima produção diária em toneladas para a Qcreme. Não há condições para ampliar o quadro de funcionários. Escreva o modelo.

Resolução

a) Variáveis de decisão:

X_1 = quantidade de sorvete em massa a produzir em toneladas;

X_2 = quantidade de picolé a produzir em toneladas.

b) Função objetivo: máxima produção diária

$X_1 + X_2 = Q\ (X) \rightarrow Max!$

c) Restrições:

$1{,}5 \cdot X_1 + X_2 \leq 40 \rightarrow (prod)$

$X_2 \leq 30 \rightarrow$ (merc => picolé)

$X_1 \leq 15 \rightarrow$ (merc => massa)

$X_1 \geq 0$

$X_2 \geq 0$

Observe que, no caso de dedicação total da capacidade produtiva ao sorvete de massa, a restrição de produção permitiria a quantidade de $\frac{40}{1{,}5} = 26{,}67t$. Outra maneira de pensar esta restrição do problema é:

$$\frac{1,5}{40} \cdot X_1 + \frac{1}{40} X_2 \leq 1 \rightarrow \textit{(dia de produção)}$$

Em que se lê:

$\frac{1,5}{40}$ → é a fração do dia para produzir uma tonelada do sorvete em massa

$\frac{1}{40}$ → é a fração do dia para produzir uma tonelada de picolé

PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO

Nesse perfil de problemas, pretende-se estabelecer um cronograma de operação ou definir uma maneira de ocupação dos equipamentos, visando a otimização de um sistema, seja para a maximização das vantagens monetárias ou para a minimização dos custos. Os exemplos 2.4 e 2.5 podem ser resolvidos pelos métodos da programação linear com variáveis contínuas ou com variáveis inteiras, assuntos a serem apresentados no item 5 deste capítulo.

Exemplo 2.4 – Fabricação e montagem KF

A firma KF fabrica uma máquina constituída de 3 peças A e 4 peças B. Os dois tipos de peças são fabricadas de três matérias-primas, das quais 100 unidades, 200 unidades e 300 unidades são, respectivamente, disponíveis por período (semana). A TAB. 2.1 fornece os requisitos de matéria-prima e o número de peças fabricadas por departamento durante um turno de produção.

TABELA 2.1

Matérias-primas necessárias e peças produzidas por turno

Dept.	Matéria-prima			Peças	
	1	2	3	A	B
1	8	6	5	7	5
2	5	9	10	6	9
3	3	8	7	8	4

Escreva o modelo para determinar número de turnos de produção por departamento, no período, que maximize o número total de máquinas.

Resolução

O processo de modelagem para esse exemplo pode ser facilitado com a confecção da FIG. 2.2 que demonstra o processo de produção desde os estoques de matéria-prima até o término da montagem.

a) Variáveis de decisão:

x_j = número de turnos por período a operar no dept. j , j = 1, 2 e 3;

b) Função objetivo:

$$\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{(7\cdot x_1+6\cdot x_2+8\cdot x_3)}{3}+\frac{(5\cdot x_1+9\cdot x_2+4\cdot x_3)}{4}\right]=Q(x)\rightarrow Máx!$$

c) Restrições:

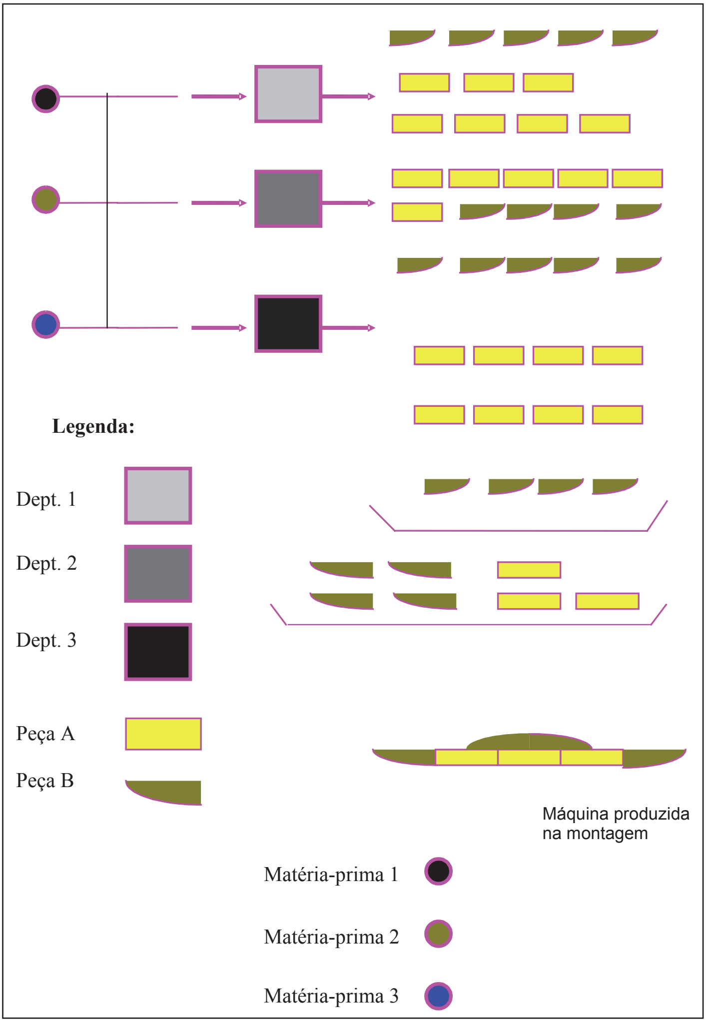
$$\frac{(7\cdot x_1+6\cdot x_2+8\cdot x_3)}{3}=\frac{(5\cdot x_1+9\cdot x_2+4\cdot x_3)}{4}$$ *(número de lotes de peças A=B)*

$8 . x_1+5 . x_2+3 . x_3 \leq 100$ *(matéria-prima 1)*

$6 . x_1+9 . x_2+8 . x_3 \leq 200$ *(matéria-prima 2)*

$5 . x_1+10 . x_2+7 . x_3 \leq 300$ *(matéria-prima 3)*

FIGURA 2.2 – Esquema do processo de produção da firma KF



Observe que:

$\frac{(7 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3)}{3}$ → é o número de lotes de peças A que a produção dos vários departamentos gera no período. A cada lote de peças A, composto de três peças deverá ser agregado um lote de peças B para montar a máquina final.

$\frac{(5 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3)}{4}$ → é o número de lotes de peças B que a produção dos vários departamentos gera no período. A cada lote de peças B, composto de quatro peças, deverá ser agregado um lote de peças A para montar a máquina final.

$Q(x)$ → é o número total de máquinas

Exemplo 2.5 – Programação das operações de uma frota de aviões

Uma companhia aérea tem três tipos de aviões e precisa servir a quatro rotas aéreas. A TAB. 2.2 fornece a capacidade máxima (em número de passageiros) de cada tipo de aeronave, o número de aviões disponíveis de cada tipo, como também o número de viagens por dia que cada tipo de avião pode fazer em uma determinada rota, por exemplo, um avião do tipo 1 pode realizar três viagens na rota 1 ou duas viagens na rota 2 ou ainda realizar a combinação de uma viagem na rota 2 e outra na rota 3. A TAB. 2.2 também oferece o número de passageiros que necessariamente terá que ser transportado em cada rota e os custos operacionais por viagem de cada tipo de avião para cada rota.

TABELA 2.2

Dados da frota e das rotas aéreas

TIPO DE AERONAVE	CAPACIDADE (Passageiros)	NÚMERO DISPONÍVEL DE AERONAVES	NÚMERO DE VIAGENS DIÁRIAS EM CADA ROTA: 1	2	3	4
1	50	5	3	2	2	1
2	30	8	4	3	3	2
3	20	10	5	5	4	2
PASSAGEIROS A SEREM TRANSPORTADOS DIARIAMENTE EM CADA ROTA →			100	200	90	120
TIPO DE AERONAVE ↓			CUSTOS OPERACIONAIS POR VIAGEM PARA CADA ROTA (R$)			
			1	2	3	4
1			1.000	1.100	1.200	1.500
2			800	900	1.000	1.000
3			600	800	800	900

Escreva, na forma de um problema de programação linear, o modelo que representa o problema real.

Escrevendo o modelo matemático

A definição das variáveis de decisão deve levar em conta o interesse do tomador de decisão ao buscar a solução do problema. O objetivo é programar os vôos de cada tipo de avião para cada rota, de modo a atingir o mínimo custo operacional total diário, respeitando as restrições de frota e de demanda.

a) Variáveis de decisão:

x_{ij} = quantidade de viagens do avião tipo "i" na rota "j"

b) Função objetivo:

$Q(x)=1000 \cdot x_{11}+1100 \cdot x_{12}+1200 \cdot x_{13}+1500 \cdot x_{14}+800 \cdot x_{21}+900 \cdot x_{22}+1000 \cdot x_{23}+1000 \cdot x_{24}+600 \cdot x_{31}+800 \cdot x_{32}+800 \cdot x_{33}+900 \cdot x_{34} \rightarrow$ *Mín! => custo diário*

c) Restrições:

$50 \cdot x_{11}+30 \cdot x_{21}+20 \cdot x_{31} \geq 100 \rightarrow$ oferta de todos aviões para a rota 1 (assentos)

$50 \cdot x_{12}+30 \cdot x_{22}+20 \cdot x_{32} \geq 200 \rightarrow$ oferta de todos aviões para a rota 2 (assentos)

$50 \cdot x_{13}+30 \cdot x_{23}+20 \cdot x_{33} \geq 90 \rightarrow$ oferta de todos aviões para a rota 3 (assentos)

$50 \cdot x_{14}+30 \cdot x_{24}+20 \cdot x_{34} \geq 120 \rightarrow$ oferta de todos aviões para a rota 4 (assentos)

$\frac{1}{3} \cdot x_{11} + \frac{1}{2} \cdot x_{12} + \frac{1}{2} \cdot x_{13} + 1 \cdot x_{14} \leq 5 \rightarrow$ disponib.//de aviões tipo 1

$\frac{1}{4} \cdot x_{21} + \frac{1}{3} \cdot x_{22} + \frac{1}{3} \cdot x_{23} + \frac{1}{2} \cdot x_{24} \leq 8 \rightarrow$ disponib.//de aviões tipo 2

$\frac{1}{5} \cdot x_{31} + \frac{1}{5} \cdot x_{32} + \frac{1}{4} \cdot x_{33} + \frac{1}{2} \cdot x_{34} \leq 10 \rightarrow$ disponib.//de aviões tipo 3

$x_{ij} \geq 0 \Rightarrow \forall i, j$

A solução ótima que minimiza o custo operacional será desenvolvida com o uso da linguagem GAMS apresentada no item 5 deste capítulo.

3. O MÉTODO GRÁFICO

O método gráfico é viável para problemas de duas variáveis, qualquer que seja o número de restrições.

O procedimento gráfico consta de duas etapas:

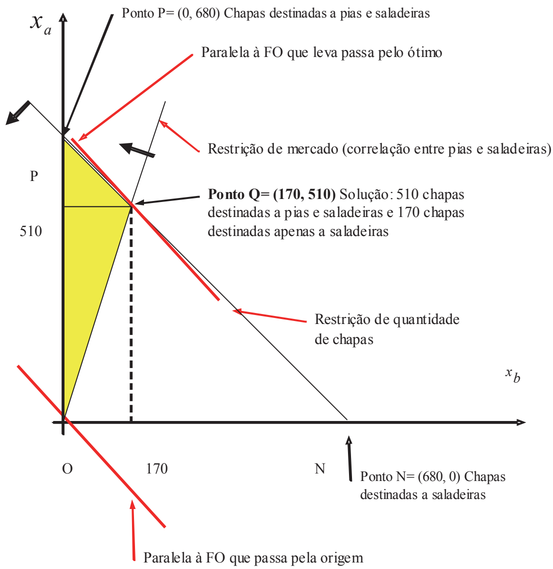
1. determinação da região de soluções viáveis formada pelo conjunto de restrições, incluindo as de não-negatividade das variáveis de decisão;
2. determinação da solução ótima entre todos os pontos viáveis da região de soluções, através do deslocamento de sucessivas paralelas à função objetivo, buscando o ponto extremo mais distante da origem para os problemas de ma-

ximização e o ponto mais próximo da origem para os problemas de minimização.

A compreensão do método gráfico fica mais evidente com a apresentação simultânea de um exemplo. A FIG. 2.3 mostra a solução gráfica do exemplo 2.1 (estamparia de saladeiras e pias).

Como o problema consta duas variáveis de decisão, a representação gráfica permite visualizar uma paralela à função objetivo que passa pela origem do sistema de eixos, e as restrições de mercado OQ e de suprimento NP. Todo o gráfico é confeccionado em função das variáveis de decisão. A reta OQ representa a restrição de correlação entre os mercados de pias e de saladeiras. O triângulo hachurado OPQ representa o conjunto de soluções factíveis (possíveis). Uma paralela à função objetivo é deslocada desde a origem do sistema de eixos (variáveis originais), indo em direção a maximização, até atingir o ponto extremo da área hachurada, em que se encontra o ponto ótimo.

FIGURA 2.3 – Método gráfico aplicado à estamparia de pias e saladeiras



Exemplo 2.6 – Resolução do exemplo 2.1 pelo método gráfico.

A aplicação do método gráfico indicou como solução ao problema de maximização da margem de contribuição, o processamento de 170 chapas como molde B e 510 chapas como o molde A, prevendo produzir 2.040 saladeiras e 510 pias para alcançar o máximo lucro.

A função objetivo, $70 \cdot X_a + 90 \cdot X_b = Q(x)$, resultaria em uma margem de contribuição global de R$51.000,00 para o período, que é o máximo possível.

No caso de um problema de minimização, o propósito seria obter o ponto mais próximo da origem, ocasião em que haveria alguma restrição do tipo maior ou igual para impedir o alcance da origem, pois não há sentido a produção nula. Então buscar-se-ia o ponto que oferecesse a menor distância perpendicular entre a paralela da função objetivo que cortaria a origem, e a função objetivo de fato, aquela e passaria pelo ponto de mínimo.

4. O MÉTODO SIMPLEX

Para uma melhor compreensão dos métodos algébricos que dão solução a um PPL é importante ter noções de álgebra linear e de sistemas produtivos.

Um PPL tem como requisito um conjunto de restrições lineares que formam entre si um conjunto de soluções convexo. A solução ótima de um PPL encontra-se em um vértice ou em um segmento de reta composto pelo intervalo de pontos entre dois vértices. Um vértice deste conjunto convexo corresponde a uma solução básica viável. A solução ótima pode ser alcançada por um método que procure sucessivos vértices até encontrar o vértice que oferece o melhor resultado. O simplex é o método que permite essa procura de maneira algébrica.

Neste texto serão apresentados: o algoritmo do método simplex fase única e o algoritmo do simplex duas fases. O primeiro proporciona soluções a problemas de programação linear com restrições do tipo menor ou igual, sendo necessariamente problemas de maximização, em que o conjunto de soluções possíveis matematicamente, admite a origem do sistema de eixos das variáveis de decisão. O segundo proporciona soluções a problemas que tenham pelo menos uma restrição do tipo maior ou igual, de maneira que o conjunto de soluções possíveis não contemple a origem do sistema de eixos das variáveis originais. Logo, os problemas de minimização são característicos dessa situação.

CONCEITOS DE ÁLGEBRA PARA O ALGORITMO SIMPLEX

Base

Se, de uma matriz , existe uma submatriz quadrada que tem determinante não nulo, de ordem "m", e o conjunto de "m" vetores-coluna são linearmente independentes, então esta matriz é denominada *base* e cada vetor-coluna é chamado vetor-base. Cada vetor-base corresponde uma variável, x_j , j=1,... n denominada de variável básica, e as demais variáveis da (n-m) matriz A são denominadas não-básicas.

Vértice

A programação linear somente tem solução quando o conjunto de soluções possíveis forma um conjunto convexo, isto é, entre qualquer par de pontos desse conjunto consegue-

-se escrever um segmento de reta estritamente pertencente a ele. Sendo respeitada a convexidade, o conjunto de soluções possíveis tem na sua periferia, equações lineares que no cruzamento formam o vértice. Cada vértice é um ponto pertencente às soluções satisfatórias para as variáveis básicas e aí se encontra uma solução básica viável.

Solução ótima

A solução ótima reside em pelo menos um vértice do conjunto de soluções possíveis e se residir em dois vértices, então, a solução ótima pode dar-se por todos os pontos possíveis pertencentes ao segmento de reta.

Viu-se que o problema de programação linear pode ser representado por um conjunto de equações ou inequações demonstradas por (2.1), (2.2) e (2.3), mas também pode ser representado pela notação matricial de (2.4) a (2.7):

$$Ax \leq b \tag{2.4}$$

$$\mathrm{b} \geq 0 \tag{2.5}$$

$$\mathrm{x} \geq 0 \tag{2.6}$$

$$c^T x = Q(x) \rightarrow \acute{o}timo \tag{2.7}$$

Em que:

A é uma matriz m x n, constando de todos os a_{ij} com i =1,... m;

a_k é o k-ésimo vetor coluna mx1, possuindo elementos a_{ik};

b é o vetor m x 1 que consta das limitações b_i;

c é um vetor n x 1 que consta dos coeficientes c_j com j = 1, ... n;

x é um vetor n x 1 que consta das variáveis de decisão x_j;

c^T é a matriz transposta de c .

Forma padrão de um PPL

A aplicação do algoritmo Simplex exige que o modelo seja adequado ao formato padrão de uma matriz representado por (2.8 a 2.11) ou (2.8' a 2.11'). Para isso, são requisitos:
- variáveis não negativas;
- limitantes não negativos;
- função objetivo de minimização;
- igualdade no conjunto de restrições.

Na forma padrão, a matriz $\boldsymbol{A}$ e o vetor de variáveis de decisão $\boldsymbol{x}$ também incluem os coeficientes das variáveis de folga e as variáveis de folga.

$$Ax = b \tag{2.8}$$
$$b \geq 0 \tag{2.9}$$
$$x \geq 0 \tag{2.10}$$
$$c^T x = Q(x) \rightarrow Mín! \tag{2.11}$$

$$a_{11}x_1 + ...a_{1s}x_s + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \tag{2.8'}$$

....

$$a_{r1}x_1 + ... + a_{rs}x_s + ... + a_{rn} + x_{n+r} = b_r$$

....

$$a_{m1} + ... + a_{ms}x_s + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m$$

$$b_i \geq 0, \rightarrow i = 1,2...m \tag{2.9'}$$

$$x_j \geq 0, \rightarrow j = 1,2,....n + m \tag{2.10'}$$

$$c_1 \cdot x_1 + ... + c_s \cdot x_s + ... + c_n \cdot x_n = Q(x) \rightarrow Mín! \tag{2.11'}$$

As variáveis de folga de x_{n+1} a x_{n+m} são incrementais ao modelo original e a cada variável de folga corresponde uma restrição de desigualdade.

A padronização é para problemas que tenham restrições do tipo menor ou igual ou maior ou igual quando se adicionam ou subtraem as variáveis de folga, respectivamente.

Quando a variável de decisão for negativa, cria-se uma variável auxiliar positiva que equivale à negativa da negativa.

Quando a variável de decisão for livre, criam-se duas variáveis auxiliares, cuja diferença equivale à variável livre.

Representação em *Tableau*

Como partida, admite-se que a solução inicial é a origem, assim, para garantir os valores dos limites das restrições b_i, que podem ser não nulos, será necessário atribuir valores às variáveis de folga. Observe que a variável original é nula, ainda que seu coeficiente não seja:

x_1	...	x_s	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+r}	...	x_{n+m}	b
a_{11}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	1	...	0	...	0	b_1
.	.	.	.	.	.		.		.	.
a_{r1}	...	a_{rs}	...	a_{rn}	0	...	1	...	0	b_r
.	.	.	.	.	.		.		.	.
a_{m1}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	0	...	0	...	1	b_m
c_1	...	c_s	...	c_n	0	...	0	...	0	$Q(x)$
$\overline{vnb}$	$\overline{vnb}$	$\overline{vnb}$	$\overline{vnb}$	$\overline{vnb}$	$\overline{vb}$	$\overline{vb}$	$\overline{vb}$	$\overline{vb}$	$\overline{vb}$	

Condições necessárias para o Simplex:

a. as n variáveis (originais) são não-básicas (VNB), atribuído o valor zero;
b. as m variáveis de folga são básicas (VB) e não-negativas;
c. os vetores coluna a_i associados às VBs devem ser linearmente independente (li), de modo a constituírem uma base associada à matriz A.

As soluções básicas viáveis serão geradas no sentido de otimizar a função objetivo.

PASSOS DO ALGORITMO SIMPLEX FASE ÚNICA

1) Encontre uma solução básica viável, em que r e s são indicadores atribuídos a uma linha e uma coluna genérica, respectivamente.

$$vnb \rightarrow \overline{x_1} = \overline{x_2} = ... = \overline{x_s} = ... = \overline{x_n} = 0$$
$$vb \rightarrow \overline{x_{n+1}} = b_1, ..., \overline{x_{n+r}} = b_r, ..., \overline{x_{n+m}} = b_m$$

2) É possível uma solução melhor? Caso afirmativo, escolha nova vb.
Para isso é necessário:

- escolher a coluna do *pivot;*
- escolher a linha do *pivot;*
- o *pivot* está determinado.

3) Escolha da coluna do *pivot*.
Existindo coeficientes negativos da função objetivo, escolha o mais negativo que indicará a coluna do *pivot* composta de coeficientes a_{is}. Esse coeficiente orienta para uma redução do valor da função objetivo.

$$c_i \leq 0 \rightarrow c_s = mín\,(c_i)$$

Inexistindo coeficiente negativo na linha de coeficientes da função objetivo, torna-se impossível diminuir o valor da função objetivo, o que indica que se encontra na solução ótima. Porém, caso exista ao menos uma VNB dentre as x_s tal que $c_s = 0$, será preciso fazer esta variável tornar-se básica, atribuindo-lhe um valor não negativo, e assim uma nova solução básica viável será gerada. Neste caso, a função objetivo já estará otimizada e uma infinidade de pares de pontos permite esta solução.

4) Escolha da linha do *pivot* e atribuição de valor à nova VB, determinação da nova VNB.
Escolhendo a linha do *pivot*:

• existindo ao menos um coeficiente a_{is} positivo e maior que zero, escolha a linha que proporciona a mínima relação b_i/a_{is};
• caso todos os a_{is} sejam nulos ou negativos, a determinação da solução ótima do PPL é impossível, pois a função objetivo tenderia para o *menos infinito*.

O *pivot* está determinado, o que fazer?

5) *Pivot*eamento e redução à forma canônica:
I) dividir a linha do *pivot* pelo *pivot* (coeficiente a_{is});
II) anular todos os demais elementos da coluna-*pivot* pela combinação entre a linha-*pivot* e as demais linhas, que pode ser feito subtraindo da i-ésima linha a nova linha *pivot*, multiplicada respectivamente por a_{1S}, a_{2S}..., $a_{r-1,S}$, $a_{r+1,S}$, ... , a_{mS}, c_S.
Havendo, ainda, algum coeficiente negativo na linha da função objetivo, retorna-se à segunda etapa. Ao contrário, caso esta seja possível, a solução ótima estará encontrada.

Exemplo 2.7 – Ampliação da frota de caminhões (adaptado de Maculan Filho; Pereira, 1980, p.28)

Uma companhia de transportes quer adquirir uma nova frota. São possíveis três caminhões, que têm os tipos, desempenhos e custos de aquisição identificados na TAB. 2.3:

TABELA 2.3

Custos e desempenhos dos caminhões

	Toco	Jamanta simples	Jamanta cabine dupla
Custo (R$)	80.000	130.000	150.000
Capacidade (t)	10	20	18
V. média (km/h)	56	48	48
Horas de operação/turno	6	6	7

A legislação permite que sejam operados até 3 turnos por dia, mas exige que os caminhões tipo Jamanta circulem necessariamente com dois motoristas.

A empresa dispõe de 150 motoristas e capacidade de zelo e manutenção para 30 caminhões. O orçamento para a aquisição dos veículos é de R$4.000.000,00.

Resolução

a) Variáveis de decisão:

x_i = quantidade de caminhões do tipo i

i = 1, 2 e 3 (Toco, Jamanta simples e Jamanta cabine dupla)

b) Função objetivo:

$$10.080 \cdot x_1 + 17.280 \cdot x_2 + 18.144 \cdot x_3 = Q(x) \rightarrow Máx!$$

Significa a busca da máxima produção de tonelada x km para o período de um dia de trabalho com três turnos de operação.

Restrições:

$$80.000 \cdot x_1 + 130.000 \cdot x_2 + 150.000 \cdot x_3 \leq 4.000.000,00$$

$$3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \leq 150$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 30 \rightarrow x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

c) Aplicação do método simplex

QUADRO 2.1

Uso do *tableau* simplex

	VNB	VNB	VNB	VB	VB	VB	
VB	x_1	x_2	x_1	x_3	x_4	x_5	B
x_4	80.000	130.000	150.000	1	0	0	4.000.000
x_5	3	6	6	0	1	0	150
x_6	1	1	1	0	0	1	30
	-10.080	-17.280	-18.144	0	0	0	Q'(x)

	VNB	VNB	VB	VB	VNB	VB	
x_4	5.000	-20.000	0	1	-25.000	0	250.000
x_3	0,5	1	1	0	1/6	0	25
x_6	0,5	0	0	0	-1/6	1	5
	-1.008	864	0	0	3.024	0	Q'(x)+ 453.600

	VB	VNB	VB	VB	VNB	VNB	
x_4	0	-20.000	0	1	-23.333	-10.000	200.000
x_3	0	1	1	0	1/3	-1	20
x_1	1	0	0	0	-1/3	2	10
	0	864	0	0	2.680	2.016	Q'(x)+ 463.680

O primeiro quadro, que acata o PPL na forma padrão, tem o valor – 18.144 como o mais negativo dentre todos os coeficientes da função Q'(x), logo, ele indica a coluna do elemento *pivot* (coluna do x_3).

A menor relação entre os limitantes da coluna B e os coeficientes da coluna do *pivot* indica que o elemento de valor seis, da segunda linha e terceira coluna, é o *pivot*, o que determina a linha do *pivot* (linha do x_5).

Todos os elementos da linha do *pivot* são divididos pelo valor do *pivot* e passam a gerar a segunda linha de coeficientes do segundo quadro.

Combinações lineares são desenvolvidas para anular os elementos acima e abaixo do *pivot*, concretizando a troca de base em que a variável x_3 passa a ser básica e a variável x_5 sai da base. Esses procedimentos resultam no segundo quadro, em que há um coeficiente na linha de Q'(x)+453.600 que é negativo, portanto o ótimo não é atingido. A busca de um novo *pivot* se faz necessária e a consequente chegada ao terceiro quadro não apresenta mais coeficientes negativos na linha de Q'(x)+463.680. Então, a solução ótima é alcançada.

O resultado oferecido pela aplicação do método simplex, por meio duas iterações, demonstrado no *tableau* simplex, indica ao decisor que ele deve adquirir 10 veículos Toco, 20 veículos Jamanta cabine dupla e não deverá adquirir nenhum veículo Jamanta cabine simples, além disso, haverá um saldo no orçamento de R$200.000,00.

Sob o ponto de vista gerencial, o que fazer com estes R$200.000,00? Se esse recurso puder ser deslocado para a contratação de mais motoristas e ampliação da capacidade de manutenção, então um novo problema é gerado e uma nova solução deverá ser buscada.

O algoritmo simplex duas fases

O algoritmo simplex duas fases, expresso por Bregalda et al (1983), resume-se à aplicação do algoritmo simplex fase única em duas vezes. A primeira para resolver um problema artificial com o objetivo de alcançar um ponto pertencente ao conjunto de restrições do problema original, e a segunda para resolver o problema original, atingindo o ponto ótimo.

O problema artificial, que tem uma função objetivo artificial composta pelas variáveis artificiais, é criado, visando possibilitar a formação de uma matriz base para a matriz de coeficientes das variáveis que compõem o sistema de equações definidos pela forma padrão, em que já estariam consideradas as variáveis originais e as variáveis de folga.

Para garantir a igualdade de cada restrição do tipo igual ou maior ou igual, as respectivas variáveis de folga teriam coeficientes negativos (–1), não permitindo que a base canônica fosse formada para iniciar o algoritmo simplex fase única. Por isso, as variáveis artificiais precisam ser inseridas, uma para cada restrição do tipo igual ou maior ou igual, estabelecendo uma matriz base canônica com todos os coeficientes não negativos, condição necessária para a aplicação do algoritmo simplex já conhecido.

A função objetivo artificial, composta pela somatória das variáveis artificiais, servirá de recurso para a aplicação do algoritmo simplex fase única, ela será a referência para a primeira fase e terá como propósito atingir um vértice do conjunto de soluções possíveis que, necessariamente, não será a origem do sistema de eixos das variáveis de decisão originais. Assim, impositivamente, todas as variáveis artificiais no primeiro quadro do *tableau* simplex participarão da base, mas esta poderá constar de uma ou mais variáveis de folga, de maneira que a base seja completada. O exemplo 2.8 ilustra a aplicação do simplex duas fases.

Exemplo 2.8 – O horticultor e suas folhas: alface, almeirão e couve

Um horticultor tem que decidir o quanto vai plantar de alface, almeirão e couve em 10 hectares de terra. A água disponível para a irrigação desse plantio é de 60.000 litros, e cada hectare de alface requer 6.000 litros, de almeirão 5.000 litros e de couve 4.000 litros. A colheita prevista em pés por hectare está na razão de 60.000 de alface ou 50.000 de almeirão ou 40.000 de couve. O produtor consegue colocar qualquer folha no mercado a R$0,50/pé. Os custos de produção, excetuando-se o preço de aquisição da terra, para cada hectare plantado são estimados em R$13.000,00 para o alface ou almeirão e R$14.000,00 para a couve. A totalidade dos clientes exige que a cada 10 pés de alface sejam oferecidos pelo menos 2 pés de almeirão e 3 de couve. Mão de obra e sementes não são problemáticos. Quanto de cada cultura deve ser plantada pelo horticultor?

Resolução

a) Variáveis de decisão:

x_i = hectares plantados da cultura i;

i = 1,2,3 (alface, almeirão e couve, respectivamente);

b) Função objetivo (maximizar lucro):

$$Q(x) = 17.000 \cdot x_1 + 12.000 \cdot x_2 + 6.000 \cdot x_3$$

c) Restrições:

$$-120.000 \cdot x_1 + 500.000 \cdot x_2 \geq 0 \qquad (1)$$

$$-180.000 \cdot x_1 + 400.000 \cdot x_3 \geq 0 \qquad (2)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10 \qquad (3)$$

$$6.000 \cdot x_1 + 5.000 \cdot x_2 + 4.000 \cdot x_3 \leq 6.000 \qquad (4)$$

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

A forma padrão exigirá o uso de uma variável de folga com coeficiente negativo para cada uma das duas primeiras restrições, (1) e (2), e duas variáveis de folga com coeficiente positivo para as restrições (3) e (4). Para gerar a base inicial, será necessário criar também duas variáveis artificiais, uma para a primeira e outra para a segunda restrição. O *tableau* simplex do QUADRO 2.2 mostra essas considerações:

QUADRO 2.2

Uso do *tableau* para o simplex duas fases

	VNB*	VNB	VNB	VNB	VNB	VB**	VB	VB	VB	Posição inicial
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x^a_1	x^a_2	B
x^a_1	-120.000	500.000	0	-1	0	0	0	1	0	0
x^a_2	-180.000	0	400.000	0	-1	0	0	0	1	0
x_6	1	1	1	0	0	1	0	0	0	10
x_7	6.000	5.000	4.000	0	0	0	1	0	0	60.000
	-17.000	-12.000	-6.000	0	0	0	0	0	0	Q'(x)
	0	0	0	0	0	0	0	1	1	$Q^a(x)$
x^a_1	-120.000	**500.000**	0	-1	0	0	0	1	0	0
x^a_2	-180.000	0	400.000	0	-1	0	0	0	1	0
x_6	1	1	1	0	0	1	0	0	0	10
x_7	6.000	5.000	4.000	0	0	0	1	0	0	60.000
	-17.000 300.000	-12.000 -500.000	-6.000 -400.000	0 1	0 1	0 0	0 0	0 0	0 0	Q'(x) $Q^a(x)$

(continua)

(continuação)

	VNB*	VB	VNB	VNB	VNB	VB**	VB	VNB	VB	
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x^a_1	x^a_2	B
x_2	-0,24	1	0	-0,000002	0	0	0	0,000002	0	0
x^a_2	180.000	0	**400.000**	0	-1	0	0	0	1	0
x_6	1,24	0	1	0,000002	0	1	0	-0,000002	0	10
x_7	7.200	0	4.000	0,01	0	0	1	-0,01	0	60.000
	-19.880	0	-6.000	-0,024	0	0	0	0,024	0	Q'(x)
	180.000	0	-400.000	0	1	0	0	1	0	$Q^a(x)$

	VNB*	VB	VB	VNB	VNB	VB**	VB	VNB	VNB	
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x^a_1	x^a_2	B
x_2	-0,24	1	0	-0,000002	0	0	0	0,000002	0	0
x_3	-0,45	0	1	0	0,000003	0	0	0	0,000003	0
x_6	**1,69**	0	0	0,000002	0,000003	1	0	-0,000002	-0,000003	10
x_7	9.000	0	0	0,01	0,012	0	1	-0,01	-0,012	60.000
	-22.580	0	0	-0,024	-0,018	0	0	0,024	0,018	Q'(x)
	0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	1	1	$Q^a(x)$

	VB	VB	VB	VNB	VNB	VNB	VB	
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	B
x_2	0	1	0	-0,000002	0,000005	0,14		1,4201
x_3	0	0	1	0,0000005	-0,000002	0,26	0	2,6627
x_1	1	0	0	0,000001	0,000002	0,59	0	5,9172
x_7	0	0	0	0,001	0,006	-5310	1	6745,56
	0	0	0	0,032	0,057	13.332	0	133.609+Q'(x)

*VB = Variável básica; **VNB = Variável não-básica

Detalhamento do *tableau* simplex duas fases:

• a linha de $Q^a(x,)$ para o segundo quadro, é uma combinação capaz de proporcionar coeficientes nulos para as variáveis artificiais. É o resultado da linha de $Q^a(x)$ do primeiro quadro menos as duas primeiras linhas do primeiro quadro, $x_1^{\ a}$ e $x_2^{\ a}$;

• no segundo quadro, em que 500.000 é o elemento *pivot*, sairá a variável artificial $x_1^{\ a}$ da base e entrará x_2 na base, formando o terceiro quadro;

• no terceiro quadro , em que 400.000 é o elemento *pivot*, sairá $x_2^{\ a}$ da base e entrará x_3 na base, formando o quarto quadro;

• no quarto quadro a função artificial se anula, termina a primeira fase e inicia-se a segunda fase, com 1,69 sendo o elemento *pivot*. Sai o x_6 da base e entra o x_1 na base.

No quinto quadro chega-se à solução ótima, em que:

• 6.745,56 litros de água serão excedentes (x_7);

• a terra deverá ser totalmente cultivada ($x_6 = 0$);

• 5,9172 hectares deverão ser plantados em alface (x_1);

• 1,4201 hectares deverão ser plantados em almeirão (x_2) e

• 2,66 hectares deverão ser plantados em couve (x_3).

O custo mínimo previsto para o período é de R$133.609,00.

5. A LINGUAGEM DE MODELAGEM GAMS E A SUA APLICAÇÃO

NOÇÕES SOBRE A LINGUAGEM DE MODELAGEM GAMS

O sistema GAMS[2] foi desenvolvido por um grupo de economistas do Banco Mundial, no final da década de 1980.

[2] General Algebraic Modeling System.

GAMS é uma linguagem de modelagem (LM) orientada para a construção de complexos modelos de programação matemática, consolidada por *Brooke et al.* Ela compreende-se em um compilador e vários solucionadores de modelos de PL, programação linear inteira e mista e a programação não linear, carregando dentro de si, além do método simplex, vários outros procedimentos algébricos.

O sistema GAMS simplifica o processamento dos dados e gera relatórios que permitem, ao analista de pesquisa operacional, avaliar os passos do processo de modelagem. A LM possibilita-o descrever modelos em um forma compacta pelas relações algébricas e independentes dos pacotes de solucionadores a serem utilizados.

A versão 22.5 da LM GAMS IDE – *Integrated Development Environment* – está acessível ao estudante universitário pelo endereço <http://www.gams.com>, desde 1º de junho de 2007.

Os modelos escritos na linguagem GAMS devem obedecer a oito blocos: (1) índices; (2) parâmetros; (3) variáveis de decisão; (4) variável dependente; (5) equações; (6) modelo; (7) ordem para a solução; (8) direção para a otimização; (9) Especificação do tipo de PPL em uso e (10) mostra. Os comandos que correspondem a esses blocos são:

1) SET;
2) SCALAR ou PARAMETER ou TABLE;
3) POSITIVE VARIABLES ou INTEGER VARIABLES;
4) VARIABLES;
5) EQUATIONS;
6) MODEL;
7) SOLVE;
8) MINIMIZING ou MAXIMIZING;
9) USING LP ou USING MIP;
10) DISPLAY.

A explicação de como utilizar esses blocos na LM GAMS está apresentada no item a seguir, na forma de aplicação do sistema GAMS ao modelo do exemplo 2.5.

O USO DA LINGUAGEM DE MODELAGEM GAMS

Considere o exemplo 2.5 do item 2 deste capítulo com o seu modelo matemático lembrado abaixo:

x_{ij} = quantidade de viagens do avião tipo "i" na rota "j"

$$Q(x) = 1.000 \cdot x_{11} + 1.100 \cdot x_{12} + 1.200 \cdot x_{13} + 1.500 \cdot x_{14} + 800 \cdot x_{21} + 900 \cdot x_{22} +$$
$$1.000 \cdot x_{23} + 1.000 \cdot x_{24} + 600 \cdot x_{31} + 800 \cdot x_{32} + 800 \cdot X_{33} + 900 \cdot x_{34} \rightarrow \mathit{Mín!} \Rightarrow \mathit{custo} \quad \mathit{dia}$$

$0 \cdot x_{11} + 30 \cdot x_{21} + 20 \cdot x_{31} \geq 100 \rightarrow$ oferta de todos aviões para a rota 1 (assentos)

$50 \cdot x_{12} + 30 \cdot x_{22} + 20 \cdot x_{32} \geq 200 \rightarrow$ oferta de todos aviões para a rota 2 (assentos)

$50 \cdot x_{13} + 30 \cdot x_{23} + 20 \cdot x_{33} \geq 90 \rightarrow$ oferta de todos aviões para a rota 3 (assentos)

$50 \cdot x_{14} + 30 \cdot x_{24} + 20 \cdot x_{34} \geq 120 \rightarrow$ oferta de todos aviões para a rota 4 (assentos)

$$\frac{1}{3} \cdot x_{11} + \frac{1}{2} \cdot x_{12} + \frac{1}{2} \cdot x_{13} + 1 \cdot x_{14} \leq 5 \rightarrow \quad \text{disponib.//de aviões tipo 1}$$
$$\frac{1}{4} \cdot x_{21} + \frac{1}{3} \cdot x_{22} + \frac{1}{3} \cdot x_{23} + \frac{1}{2} \cdot x_{24} \leq 8 \rightarrow \quad \text{disponib.//de aviões tipo 2}$$
$$\frac{1}{5} \cdot x_{31} + \frac{1}{5} \cdot x_{32} + \frac{1}{4} \cdot x_{33} + \frac{1}{2} \cdot x_{34} \leq 10 \rightarrow \quad \text{disponib.//de aviões tipo 3}$$
$$x_{ij} \geq 0 \Rightarrow \forall i, j$$

- Transcrição do PPL para a LM GAMS

a) Tratando o PPL com variáveis contínuas (*Linear Program* - LP)

Quando este PPL é tratado com variáveis contínuas que admitem soluções fracionadas, a escrita na LM GAMS no arquivo de entrada (gms), que nunca deve contar com caracteres específicos de línguas não inglesas (acentos, cedilhas, tremas e outros), fica:

```
SET
R Rotas /T11, T12, T13, T14, T21, T22, T23, T24, T31, T32, T33, T34/;
*  Sejam os parametros referentes aos limites das restricoes a seguir
PARAMETERS
ROTA1 Qtde minima de passageiros da rota 1
ROTA2 Qtde minima de passageiros da rota 2
ROTA3 Qtde minima de passageiros da rota 3
ROTA4 Qtde minima de passageiros da rota 4
QTAV1 Qtde maxima de avioes por tipo 1
QTAV2 Qtde maxima de avioes por tipo 2
QTAV3 Qtde maxima de avioes por tipo 3;
ROTA1=100;
ROTA2=200;
ROTA3=90 ;
ROTA4=120;
QTAV1=5;
QTAV2=8;
QTAV3=10;
PARAMETERS
P11 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 1 NA ROTA 1 Passageiros A11
P12 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 1 NA ROTA 2 Passageiros A21
P13 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 1 NA ROTA 3 Passageiros A31
P14 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 1 NA ROTA 4 Passageiros A41
P21 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 2 NA ROTA 1 Passageiros A12
P22 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 2 NA ROTA 2 Passageiros A22
P23 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 2 NA ROTA 3 Passageiros A32
P24 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 2 NA ROTA 4 Passageiros A42
P31 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 3 NA ROTA 1 Passageiros A13
P32 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 3 NA ROTA 2 Passageiros A23
P33 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 3 NA ROTA 3 Passageiros A33
P34 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 3 NA ROTA 4 Passageiros A43
```

```
A51 PROPORC aeronave 1 ROTA 1 EM UMA VIAGEM NA QUINTA RESTR
A52 PROPORC aeronave 1 ROTA 2 EM UMA VIAGEM NA QUINTA RESTR
A53 PROPORC aeronave 1 ROTA 3 EM UMA VIAGEM NA QUINTA RESTR
A54 PROPORC aeronave 1 ROTA 4 EM UMA VIAGEM NA QUINTA RESTR
A61 PROPORC aeronave 2 ROTA 1 EM UMA VIAGEM NA SEXTA RESTR
A62 PROPORC aeronave 2 ROTA 2 EM UMA VIAGEM NA SEXTA RESTR
A63 PROPORC aeronave 2 ROTA 3 EM UMA VIAGEM NA SEXTA RESTR
A64 PROPORC aeronave 2 ROTA 4 EM UMA VIAGEM NA SEXTA RESTR
A71 PROPORC aeronave 3 ROTA 1 EM UMA VIAGEM NA SETIMA RESTR
A72 PROPORC aeronave 3 ROTA 2 EM UMA VIAGEM NA SETIMA RESTR
A73 PROPORC aeronave 3 ROTA 3 EM UMA VIAGEM NA SETIMA RESTR
A74 PROPORC aeronave 3 ROTA 4 EM UMA VIAGEM NA SETIMA
RESTR;
P11=50;
P12=50;
P13=50;
P14=50;
P21=30;
P22=30;
P23=30;
P24=30;
P31=20;
P32=20;
P33=20;
P34=20;
A51=1/3;
A52=1/2;
A53=1/2;
A54=1;
A61=1/4;
A62=1/3;
```

```
A63=1/3;
A64=1/2;
A71=1/5;
A72=1/5;
A73=1/4;
A74=1/2;
PARAMETERS
C11 Custo da aeronave 1 NA ROTA 1
C12 Custo da aeronave 1 NA ROTA 2
C13 Custo da aeronave 1 NA ROTA 3
C14 Custo da aeronave 1 NA ROTA 4
C21 Custo da aeronave 2 NA ROTA 1
C22 Custo da aeronave 2 NA ROTA 2
C23 Custo da aeronave 2 NA ROTA 3
C24 Custo da aeronave 2 NA ROTA 4
C31 Custo da aeronave 3 NA ROTA 1
C32 Custo da aeronave 3 NA ROTA 2
C33 Custo da aeronave 3 NA ROTA 3
C34 Custo da aeronave 3 NA ROTA 4 ;
C11=1000;
C12=1100;
C13=1200;
C14=1500;
C21=800;
C22=900;
C23=1000;
C24=1000;
C31=600;
C32=800;
C33=800;
C34=900;
```

```
POSITIVE VARIABLES
X(R) Quantidade de viagens a realizar;
VARIABLE
CUSTO Custo minimo viagem
EQUATIONS
FO Funcao objetivo
R1 Restricao de passageiros da rota 1
R2 Restricao de passageiros da rota 2
R3 Restricao de passageiros da rota 3
R4 Restricao de passageiros da rota 4
AV1 Restricao de oferta aeronave 1
AV2 Restricao de oferta aeronave 2
AV3 Restricao de oferta aeronave 3;
FO .. CUSTO=E=
C11*X(“T11”)+C12*X(“T12”)+C13*X(“T13”)+C14*X(“T14”)+
C21*X(“T21”)+C22*X(“T22”)+C23*X(“T23”)+C24*X(“T24”)+
C31*X(“T31”)+C32*X(“T32”)+C33*X(“T33”)+C34*X(“T34”);
R1 .. P11*X(“T11”)+P21*X(“T21”)+ P31*X(“T31”)=G=ROTA1;
R2 .. P12*X(“T12”)+P22*X(“T22”)+ P32*X(“T32”)=G=ROTA2;
R3 .. P13*X(“T13”)+P23*X(“T23”)+ P33*X(“T33”)=G=ROTA3;
R4 .. P14*X(“T14”)+P24*X(“T24”)+ P34*X(“T34”)=G=ROTA4;
AV1 .. A51*X(“T11”)+A52*X(“T12”)+A53*X(“T13”)+A54*X(“T14”)=
L=QTAV1;
AV2 .. A61*X(“T21”)+A62*X(“T22”)+A63*X(“T23”)+A64*X(“T24”)=
L=QTAV2;
AV3 .. A71*X(“T31”)+A72*X(“T32”)+A73*X(“T33”)+A74*X(“T34”)=
L=QTAV3;
*LIMITANTE
CUSTO.LO=0;
CUSTO.UP=20000000;
```

```
MODEL aeronave/ALL/;
SOLVE aeronave MINIMIZING CUSTO USING LP;


DISPLAY X.L;
DISPLAY CUSTO.L;
PARAMETER
CTFIN CUSTO TOTAL FINAL
FOLGR1 FOLGA NA RESTR 1 OF ASSENTOS ROTA 1
FOLGR2 FOLGA NA RESTR 2 OF ASSENTOS ROTA 2
FOLGR3 FOLGA NA RESTR 3 OF ASSENTOS ROTA 3
FOLGR4 FOLGA NA RESTR 4 OF ASSENTOS ROTA 4
FOLGR5 FOLGA NA RESTR 5 DISP AV 1
FOLGR6 FOLGA NA RESTR 6 DISP AV 2
FOLGR7 FOLGA NA RESTR 7 DISP AV 3;
CTFIN=C11*X.L("T11")+C12*X.L("T12")+C13*X.L("T13")+C14*X.L
("T14")+ C21*X.L("T21")+C22*X.L("T22")+C23*X.L("T23")+C24*X
.L("T24")+ C31*X.L("T31")+C32*X.L("T32")+C33*X.L("T33")+C34
*X.L("T34");
FOLGR1=P11*X.L("T11")+P21*X.L("T21")+ P31*X.L("T31")-ROTA1;
FOLGR2=P12*X.L("T12")+P22*X.L("T22")+ P32*X.L("T32")-ROTA2;
FOLGR3=P13*X.L("T13")+P23*X.L("T23")+ P33*X.L("T33")-ROTA3;
FOLGR4=P14*X.L("T14")+P24*X.L("T24")+ P34*X.L("T34")-ROTA4;
FOLGR5=QTAV1-(A51*X.L("T11")+A52*X.L("T12")+A53*X.L("T13")
+A54*X.L("T14"));
FOLGR6=QTAV2-(A61*X.L("T21")+A62*X.L("T22")+A63*X.L("T23")
+A64*X.L("T24"));
FOLGR7=QTAV3-(A71*X.L("T31")+A72*X.L("T32")+A73*X.L("T33")
+A74*X.L("T34"));
DISPLAY CTFIN;
DISPLAY FOLGR1;
```

```
DISPLAY FOLGR2;
DISPLAY FOLGR3;
DISPLAY FOLGR4;
DISPLAY FOLGR5;
DISPLAY FOLGR6;
DISPLAY FOLGR7;
```

Solução

O sistema GAMS gera um relatório de saída (lst), do qual os dados abaixo podem ser extraídos da linhas131 a 157:

```
----   131 VARIABLE X.L  QUANTIDADE DE VIAGENS A REALIZAR

T11 2.000,    T12 4.000,    T13 1.800,    T14 1.433,    T24 1.611


----   132 VARIABLE CUSTO.L    =   12321.111  CUSTO MINIMO VIAGEM

----   150 PARAMETER CTFIN    =   12321.111  CUSTO TOTAL FINAL

----   151 PARAMETER FOLGR1   =    0.000  FOLGA NA RESTR 1 OF
ASSENTOS ROTA 1

----   152 PARAMETER FOLGR2   =   0.000  FOLGA NA RESTR 2 OF
ASSENTOS ROTA 2

----   153 PARAMETER FOLGR3   =   0.000  FOLGA NA RESTR 3 OF
ASSENTOS ROTA 3

----   154 PARAMETER FOLGR4   =   0.000  FOLGA NA RESTR 4 OF
ASSENTOS ROTA 4

----   155 PARAMETER FOLGR5   =   0.000  FOLGA NA RESTR 5 DISP AV
1

----   156 PARAMETER FOLGR6   =   7.194  FOLGA NA RESTR 6 DISP AV
2

----   157 PARAMETER FOLGR7   =   10.000  FOLGA NA RESTR 7 DISP
AV 3
```

- A interpretação desse resultado é:
• apenas as restrições 6 e 7 teriam folgas;
• 7,194 aeronaves do tipo 2 não seriam utilizadas (número fracionado devido ao problema ser tratado com variáveis contínuas);

• 10 aeronaves do tipo três não seriam utilizadas;
• todos os demais recursos seriam utilizados.
- A solução ótima para a operação diária é:
• 2 viagens do avião do tipo 1 para a rota 1;
• 4 viagens do avião do tipo 1 para a rota 2;
• 1,8 viagens do avião do tipo 1 para a rota 3 (número fracionado devido ao problema ser tratado com variáveis contínuas);
• 1,433 viagens do avião do tipo 1 para a rota 4 (número fracionado devido ao problema ser tratado com variáveis contínuas);
• 1,611 viagens do avião do tipo 2 para a rota 4 (número fracionado devido ao problema ser tratado com variáveis contínuas);
• o custo diário mínimo é R$12.321,11.

b) Tratando o PPL com variáveis inteiras (*Mixed Integer Program* - MIP)

Ao tratar do mesmo problema, porém resolvido com variáveis inteiras que não admite soluções fracionadas, a LM GAMS fica:

```
SET
R Rotas /T11, T12, T13, T14, T21, T22, T23, T24, T31, T32, T33, T34/;
*  Sejam os parametros referentes aos limites das restricoes a seguir
PARAMETERS
ROTA1 Qtde minima de passageiros da rota 1
ROTA2 Qtde minima de passageiros da rota 2
ROTA3 Qtde minima de passageiros da rota 3
ROTA4 Qtde minima de passageiros da rota 4
QTAV1 Qtde maxima de avioes por tipo 1
QTAV2 Qtde maxima de avioes por tipo 2
QTAV3 Qtde maxima de avioes por tipo 3;
ROTA1=100;
ROTA2=200;
ROTA3=90 ;
ROTA4=120;
QTAV1=5;
QTAV2=8;
QTAV3=10;
PARAMETERS
P11 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 1 NA ROTA 1 Passageiros A11
P12 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 1 NA ROTA 2 Passageiros A21
P13 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 1 NA ROTA 3 Passageiros A31
P14 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 1 NA ROTA 4 Passageiros A41
P21 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 2 NA ROTA 1 Passageiros A12
P22 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 2 NA ROTA 2 Passageiros A22
P23 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 2 NA ROTA 3 Passageiros A32
P24 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 2 NA ROTA 4 Passageiros A42
P31 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 3 NA ROTA 1 Passageiros A13
P32 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 3 NA ROTA 2 Passageiros A23
P33 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 3 NA ROTA 3 Passageiros A33
P34 PASSAGEIROS EM UMA aeronave 3 NA ROTA 4 Passageiros A43
```

```
A51 PROPORC aeronave 1 ROTA 1 EM UMA VIAGEM NA QUINTA RESTR
A52 PROPORC aeronave 1 ROTA 2 EM UMA VIAGEM NA QUINTA RESTR
A53 PROPORC aeronave 1 ROTA 3 EM UMA VIAGEM NA QUINTA RESTR
A54 PROPORC aeronave 1 ROTA 4 EM UMA VIAGEM NA QUINTA RESTR
A61 PROPORC aeronave 2 ROTA 1 EM UMA VIAGEM NA SEXTA RESTR
A62 PROPORC aeronave 2 ROTA 2 EM UMA VIAGEM NA SEXTA RESTR
A63 PROPORC aeronave 2 ROTA 3 EM UMA VIAGEM NA SEXTA RESTR
A64 PROPORC aeronave 2 ROTA 4 EM UMA VIAGEM NA SEXTA RESTR
A71 PROPORC aeronave 3 ROTA 1 EM UMA VIAGEM NA SETIMA RESTR
A72 PROPORC aeronave 3 ROTA 2 EM UMA VIAGEM NA SETIMA RESTR
A73 PROPORC aeronave 3 ROTA 3 EM UMA VIAGEM NA SETIMA RESTR
A74 PROPORC aeronave 3 ROTA 4 EM UMA VIAGEM NA SETIMA RESTR;
P11=50;
P12=50;
P13=50;
P14=50;
P21=30;
P22=30;
P23=30;
P24=30;
P31=20;
P32=20;
P33=20;
P34=20;
A51=1/3;
A52=1/2;
A53=1/2;
A54=1;
A61=1/4;
A62=1/3;
A63=1/3;
```

```
A64=1/2;
A71=1/5;
A72=1/5;
A73=1/4;
A74=1/2;
PARAMETERS
C11 Custo da aeronave 1 NA ROTA 1
C12 Custo da aeronave 1 NA ROTA 2
C13 Custo da aeronave 1 NA ROTA 3
C14 Custo da aeronave 1 NA ROTA 4
C21 Custo da aeronave 2 NA ROTA 1
C22 Custo da aeronave 2 NA ROTA 2
C23 Custo da aeronave 2 NA ROTA 3
C24 Custo da aeronave 2 NA ROTA 4
C31 Custo da aeronave 3 NA ROTA 1
C32 Custo da aeronave 3 NA ROTA 2
C33 Custo da aeronave 3 NA ROTA 3
C34 Custo da aeronave 3 NA ROTA 4 ;
C11=1000;
C12=1100;
C13=1200;
C14=1500;
C21=800;
C22=900;
C23=1000;
C24=1000;
C31=600;
C32=800;
C33=800;
C34=900;
INTEGER VARIABLES
```

```
X(R) Quantidade de viagens a realizar;
VARIABLE
CUSTO Custo minimo viagem
EQUATIONS
FO Funcao objetivo
R1 Restricao de passageiros da rota 1
R2 Restricao de passageiros da rota 2
R3 Restricao de passageiros da rota 3
R4 Restricao de passageiros da rota 4
AV1 Restricao de oferta aeronave 1
AV2 Restricao de oferta aeronave 2
AV3 Restricao de oferta aeronave 3;
FO .. CUSTO=E=
C11*X("T11")+C12*X("T12")+C13*X("T13")+C14*X("T14")+
C21*X("T21")+C22*X("T22")+C23*X("T23")+C24*X("T24")+
C31*X("T31")+C32*X("T32")+C33*X("T33")+C34*X("T34");
R1 .. P11*X("T11")+P21*X("T21")+ P31*X("T31")=G=ROTA1;
R2 .. P12*X("T12")+P22*X("T22")+ P32*X("T32")=G=ROTA2;
R3 .. P13*X("T13")+P23*X("T23")+ P33*X("T33")=G=ROTA3;
R4 .. P14*X("T14")+P24*X("T24")+ P34*X("T34")=G=ROTA4;
AV1 .. A51*X("T11")+A52*X("T12")+A53*X("T13")+A54*X("T14")=L
=QTAV1;
AV2 .. A61*X("T21")+A62*X("T22")+A63*X("T23")+A64*X("T24")=L
=QTAV2;
AV3 .. A71*X("T31")+A72*X("T32")+A73*X("T33")+A74*X("T34")=L
=QTAV3;
*LIMITANTE
CUSTO.LO=0;
CUSTO.UP=20000000;
 MODEL aeronave/ALL/;
SOLVE aeronave MINIMIZING CUSTO USING MIP;
 DISPLAY X.L;
```

```
DISPLAY CUSTO.L;
PARAMETER
CTFIN CUSTO TOTAL FINAL
FOLGR1 FOLGA NA RESTR 1 OF ASSENTOS ROTA 1
FOLGR2 FOLGA NA RESTR 2 OF ASSENTOS ROTA 2
FOLGR3 FOLGA NA RESTR 3 OF ASSENTOS ROTA 3
FOLGR4 FOLGA NA RESTR 4 OF ASSENTOS ROTA 4
FOLGR5 FOLGA NA RESTR 5 DISP AV 1
FOLGR6 FOLGA NA RESTR 6 DISP AV 2
FOLGR7 FOLGA NA RESTR 7 DISP AV 3;
CTFIN=C11*X.L("T11")+C12*X.L("T12")+C13*X.L("T13")+C14*X.L(
"T14")+ C21*X.L("T21")+C22*X.L("T22")+C23*X.L("T23")+C24*X.L
("T24")+ C31*X.L("T31")+C32*X.L("T32")+C33*X.L("T33")+C34*X.
L("T34");
FOLGR1=P11*X.L("T11")+P21*X.L("T21")+ P31*X.L("T31")-ROTA1;
FOLGR2=P12*X.L("T12")+P22*X.L("T22")+ P32*X.L("T32")-ROTA2;
FOLGR3=P13*X.L("T13")+P23*X.L("T23")+ P33*X.L("T33")-ROTA3;
FOLGR4=P14*X.L("T14")+P24*X.L("T24")+ P34*X.L("T34")-ROTA4;
FOLGR5=QTAV1-(A51*X.L("T11")+A52*X.L("T12")+A53*X.L("T13")+
A54*X.L("T14"));
FOLGR6=QTAV2-(A61*X.L("T21")+A62*X.L("T22")+A63*X.L("T23")+
A64*X.L("T24"));
FOLGR7=QTAV3-(A71*X.L("T31")+A72*X.L("T32")+A73*X.L("T33")
+A74*X.L("T34"));
DISPLAY CTFIN;
DISPLAY FOLGR1;
DISPLAY FOLGR2;
DISPLAY FOLGR3;
DISPLAY FOLGR4;
DISPLAY FOLGR5;
DISPLAY FOLGR6;
DISPLAY FOLGR7;
```

```
SET
R Rotas /T11, T12, T13, T14, T21, T22, T23, T24, T31, T32, T33, T34/;
*  Sejam os parametros referentes aos limites das restricoes a seguir
PARAMETERS
ROTA1 Qtde minima de passageiros da rota 1
ROTA2 Qtde minima de passageiros da rota 2
ROTA3 Qtde minima de passageiros da rota 3
ROTA4 Qtde minima de passageiros da rota 4
QTAV1 Qtde maxima de avioes por tipo 1
QTAV2 Qtde maxima de avioes por tipo 2
QTAV3 Qtde maxima de avioes por tipo 3;
ROTA1=100;
ROTA2=200;
ROTA3=90 ;
ROTA4=120;
QTAV1=5;
```

Solução

O sistema GAMS gera um relatório de saída (lst), do qual os dados abaixo podem ser extraídos da linha 131 a 157:

```
----   131 VARIABLE X.L  QUANTIDADE DE VIAGENS A REALIZAR

T11 2.000,   T12 4.000,   T13 2.000,   T14 1.000,   T24 1.000,   T34
2.000

----   132 VARIABLE CUSTO.L  =  13100.000  CUSTO MINIMO VIAGEM

----   150 PARAMETER CTFIN  =  13100.000  CUSTO TOTAL FINAL

----   151 PARAMETER FOLGR1  =  0.000  FOLGA NA RESTR 1 OF
ASSENTOS ROTA 1

----   152 PARAMETER FOLGR2   =   0.000  FOLGA NA RESTR 2 OF
ASSENTOS ROTA 2

----   153 PARAMETER FOLGR3  =  10.000  FOLGA NA RESTR 3 OF
ASSENTOS ROTA 3

----   154 PARAMETER FOLGR4   =   0.000  FOLGA NA RESTR 4 OF
ASSENTOS ROTA 4

----   155 PARAMETER FOLGR5  =  0.333  FOLGA NA RESTR 5 DISP AV 1

----   156 PARAMETER FOLGR6   =   7.500  FOLGA NA RESTR 6 DISP
AV 2

----   157 PARAMETER FOLGR7  =   9.000  FOLGA NA RESTR 7 DISP AV 3
```

- A interpretação desse resultado é:
• das 5 aeronaves do tipo 1, quatro seriam totalmente utilizadas e uma teria um terço de sua capacidade em ociosidade;
• 7 aeronaves do tipo 2 não seriam utilizadas;
• 9 aeronaves do tipo três não seriam utilizadas;
• todos os demais recursos seriam utilizados e a oferta de assentos para a rota 3 teria o excesso de 10 lugares.
- A solução ótima para a operação diária é:
• 02 viagens do avião do tipo 1 para a rota 1;
• 04 viagens do avião do tipo 1 para a rota 2;

- 2 viagens do avião do tipo 1 para a rota 3;
- 1 viagem do avião do tipo 1 para a rota 4;
- 1 viagem do avião do tipo 2 para a rota 4;
- 1 viagem do avião do tipo 3 para a rota 4;
- o custo diário de R$13.100,00.

- Reflexão gerencial sobre os resultados

Comparando os resultados do problema com variáveis contínuas LP, com os do problema com variáveis inteiras (MIP).

Número de viagens e custos (LP)

LP	ROTAS				
TIPO DE AVIÃO	1	2	3	4	CUSTO TOTAL (R$)
1	2	4	1,8	1,43333	
2	0	0	0	1,611	
3	0	0	0	0	
CUSTO POR ROTA	2.000	4.400	2.160	3.760,995	12.321

Número de viagens e custos (MIP)

MIP	ROTAS				
TIPO DE AVIÃO	1	2	3	4	CUSTO TOTAL (R$)
1	2	4	2	1	
2	0	0	0	1	
3	0	0	0	2	
CUSTO POR ROTA	2.000	4.400	2.400	4.300	13.100

A solução com variáveis inteiras encarece o custo diário em R$779,00 ou 6,32%, entretanto parece ser mais razoável decidir pela solução com variáveis inteiras (quadro MIP).

Por outro lado, esses resultados indicam que existe ociosidade na frota. O que fazer com esta ociosidade? A empresa deve reduzir preços e lucros unitários para incrementar a demanda? Deve locar as aeronaves às outras companhias? Deve vender aeronaves? Deve buscar novas concessões junto às Agências Reguladoras?

As respostas a estas questões passam pela definição de estratégia da empresa.

6. O problema do transporte

Modelo de um problema do transporte

A resolução de um problema clássico do transporte resume-se em determinar o carregamento de uma rede de transporte que liga várias fontes a vários destinos, onde se pressupõe que a quantidade ofertada do conjunto de origens seja igual à quantidade demandada pelo conjunto de destinos, e o objetivo é alcançar o mínimo custo total do transporte.

O problema do transporte é uma particularidade de um problema de programação linear, em que as restrições são funções de igualdade e em que o interesse é obter a quantidade ótima a despachar através de cada par de pontos origem-destino.

Forma geral do modelo de um problema clássico do transporte

Um problema clássico de transportes pode ser representado genericamente de maneira matemática pelas equações (2.12) a (2.14).

$$Mín!Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \qquad (2.12)$$

sujeito

a :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (2.14)$$

$i = 1,2,...m$

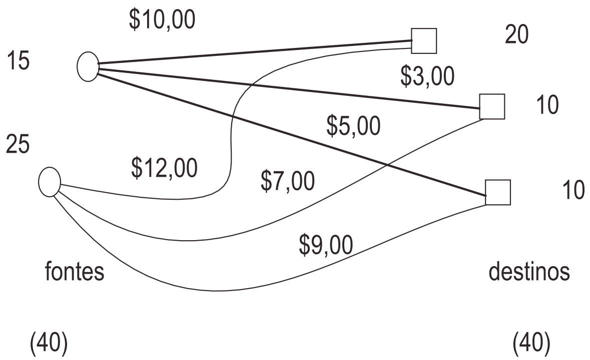
$j = 1,2,...n,$

$$\text{sendo}: \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Exemplo 2.9 – Problema do transporte

A figura 2.4 representa um problema do transporte em que se dispõe de duas origens: (1) e (2) e três destinos: (1), (2), (3). As origens (1) e (2) produzem, respectivamente, 15 mil e 25 mil unidades. Os destinos (1), (2) e (3) demandam, respectivamente, 20, 10 e 10 mil unidades. Os custos unitários de transporte entre cada par de origem-destino encontram-se identificados nos respectivos trechos. Como escrever o modelo desse problema?

FIGURA 2.4 – Exemplo de um problema clássico do transporte



Escrevendo o modelo:

$$Mín!Z = 10 \cdot x_{11} + 3 \cdot x_{12} + 5 \cdot x_{13} + 12 \cdot x_{21} + 7 \cdot x_{22} + 9 \cdot x_{23}$$

$Restrições$:

$oferta$:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 15$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 25$$

$demanda$:

$$x_{11} + x_{21} = 20$$

$$x_{12} + x_{22} = 10$$

$$x_{13} + x_{23} = 10$$

Condições de não negatividade:

$x_{ij} \geq 0$ Variáveis de decisão

Resolução de um problema clássico do transporte

Um problema do transporte é uma particularidade de um PPL em que as restrições são necessariamente de igualdade, por isto pode ser resolvido por métodos específicos, que através de um procedimento heurístico, encontra-se uma solução básica viável (MACULAN FILHO; PEREIRA, 1980, p. 132).

Um método de resolução de um problema clássico do transporte geralmente dá-se por de um procedimento que busca uma boa solução, mas não garante que ela seja ótima. Obtida essa, utiliza-se, ainda, outro procedimento de iterações sucessivas para alcançar melhores soluções até que chegue à ótima.

A alocação prioritária de carga à célula de menor custo unitário mínimo é um método que permite alcançar a primeira solução viável. Em seguida, a análise da variação do custo total com o remanejamento de uma unidade para cada célula de alocação até então nula, é outro método que permite a busca da solução ótima.

O primeiro método, que oferece a solução inicial, consiste na alocação do máximo volume possível ao itinerário que dispor do menor custo unitário de transporte. O segundo método é um processo iterativo que deve verificar quais remanejamentos proporcionam a redução no custo total. Esse oferece sucessivas soluções, cada uma melhor que a outra, até que não consiga nenhuma melhor, quando então terá alcançado a solução ótima.

Solução inicial para o exemplo 2.9:

1) Represente o problema em um quadro de coeficientes e de variáveis de decisão especificando as capacidades de oferta e demanda (TAB. 2.4);

TABELA 2.4

Coeficientes das variáveis de decisão (custo unitário – R$)

	1	2	3	oferta
1	**10**	**3**	**5**	
Variáveis x_{1j}	x_{11}	x_{12}	v	15
2	**12**	**7**	**9**	
Variáveis x_{2j}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	25
Demanda	20	10	10	40

2) Aloque o máximo volume à rota de menor custo (TAB. 2.5)

TABELA 2.5

Alocação preferencial à rota de menor custo

	1	2	3	oferta
1	**10**	**3**	**5**	
Variáveis x_{1j}	$x_{11} = 0$	$x_{12} = 10$	$x_{13} = 0$	15
2	**12**	**7**	**9**	
Variáveis x_{2j}	$x_{21} = 0$	$x_{22} = 10$	$x_{23} = 0$	25
Demanda	20	10	10	40

Assim, a solução inicial é:

$x_{11} = 0,\ x_{12} = 10,\ x_{13} = 5,\ x_{21} = 20,\ x_{22} = 0$ e $x_{23} = 5$

Método da análise da variação do custo total: obtenção da solução ótima para o exemplo 2.9

O segundo método consiste em explorar as possibilidades de obter vantagens ao alocar valores às variáveis até então nulas. O procedimento inicia alocando uma só unidade àquela variável e buscando o novo equilíbrio para as condições de oferta e demanda, e então se calcula a vantagem ou desvantagem proporcionada por essa nova situação no custo total. Caso incremente o custo total, despreza-se tal alocação, caso decremente, explora-se o máximo de vantagem com a alocação de mais unidades. Repete-se o procedimento para outras variáveis de decisão que haviam obtido valores nulos na primeira solução, até que não se consiga melhorar, isto é, reduzir o custo total quando então estará alcançada a solução ótima. Acompanhe os passos devidamente aplicados ao exemplo 2.9:

1) Acrescentando uma unidade à variável x_{11}, resultando em $x_{11} = 1$, será necessário reduzir uma unidade na variável x_{12}, $x_{12} = 9$. Para alcançar o equilíbrio, ter-se-á de acrescentar uma unidade a x_{22} e reduzir uma de x_{21}.

2) Calculando o efeito da variação na função objetivo como o incremento à variável x_{11}, isto resulta em um incremento de 2 unidades monetárias no custo total, logo não interessa essa linha de raciocínio.

Realizando cálculos equivalentes para a variável x_{22}, chega-se ao resultado de que não há alteração no custo total. Assim, tão boa quanto à primeira solução, será aquela que vier a explorar o incremento em x_{22}, o decremento em x_{12}, o incremento em x_{13} e o decremento em x_{23}. Portanto, o custo mínimo alcançado é de 340 unidades monetárias, havendo mais de uma distribuição dos volumes para tal resultado.

7. EXERCÍCIOS

1) Considere que 1.270 caixas de laranja precisam ser distribuídas a partir das origens 1, 2, e 3, em direção aos destinos 1, 2, 3 e 4, cujas demandas e ofertas encontram-se na TAB. 2-I, de custos de transportes por unidade (caixa) em reais (R$), abaixo

especificada, que demonstra os itinerários entre os pares de origem-destino. Quantas caixas devem ser distribuídas a cada destino para minimizar o custo total de transporte no período?

TABELA 2-I

Custo unitário de transporte por par de origem-destino

DESTINOS					
Origens	1	2	3	4	Ofertas
1	10	8	39	45	470
2	15	6	25	30	400
3	60	50	12	28	400
Demandas	350	500	300	120	1.270

2) Marcus estava saindo com duas namoradas: Cristiane e Andréa. Sabe-se por experiência, que:

I) uma saída de três horas com Cristiane, elegante, gosta de frequentar lugares sofisticados, mais caros e ousados, custará 60 reais;

II) com Andréa, modesta e simples, porém agitada, que prefere um divertimento mais popular, uma saída de três horas custará 40 reais;

III) o orçamento de Marcus permite o limite de 240 reais por mês para diversão;

IV) para conseguir formar, Marcus não pode dedicar mais do que 18 horas a esses passeios. A sua energia para isso também é limitada, no máximo 40.000 calorias mensais;

V) cada saída com Cristiane consome 5.000 calorias, mas com Andréa, mais extrovertida, gasta o dobro;

VI) Marcus gosta igualmente de passear com as duas. Escreva o modelo e resolva-o.

3) Um fabricante de dois produtos finais, P_1 e P_2, deseja saber o quanto deve produzir de cada um para alcançar o máxi-

mo lucro semanal. Sabe-se que não há restrições de demanda e nem de fornecimento. Ambos os produtos requerem três tipos de mão de obra, A, B e C, nas quantidades, respectivamente, de 2, 1 e 4 horas para o produto P_1 e de 2, 2 e 2 para o produto P_2. Quatro operários trabalham na seção de serviços A, três na B e sete na C. A fábrica opera 8 horas por dia durante 5 dias da semana. Os lucros são de R$1,00 para o produto P_1 e de R$1,50 para o produto P_2.

4) Um fabricante de cintos de couro para o público masculino produz os tipos luxo e standart. O tipo luxo requer o dobro de tempo de processamento do que requer o standart. Ele dispõe semanalmente de 550 fivelas para o luxo e 700 para o standart. Sabe-se que o couro para a produção dos cintos é suficiente para 1.100 unidades, indistintamente, porém se dependesse da capacidade efetiva de produção, esta seria suficiente para 1.200 cintos standart. A clientela não adquire mais do que 3 cintos standart para cada cinto de luxo. Os lucros obtidos com cada tipo de cinto são de, R$5,00 para o luxo e R$2,50 para o standart. O fabricante deseja saber quantos cintos poderá fabricar para obter o máximo lucro possível. Resposta: infinitas soluções ótimas – R$3.000,00 – 550 de luxo e 100 standart é uma das respostas.

5) Uma indústria madeireira produz dois móveis: cedrito e xiquito, e os comercializa a R$1.425,00 e R$1.011,00, respectivamente. Uma unidade do cedrito requer 6 chapas-base de pinho e 12 chapas-base de cedro, enquanto uma de xiquito requer apenas 18 chapas-base de pinho. As margens de contribuição são de R$240,00 e R$375,00, respectivamente. A capacidade de produção mensal é de 2.400 unidades, indistintamente, porém os fornecedores conseguem suprir 14.400 chapas-base de cedro e 36.000

chapas-base de pinho. O mercado não absorve mais do que 1.750 unidades cedrito, mas não há restrições para o mercado de xiquito. Quanto de cada móvel deverá ser produzido mensalmente?

6) Uma empresa fabricante de mochilas realizou um estudo de racionalização do seu mix de produção e decidiu fabricar apenas três tamanhos a partir da próxima semana. Os preços dos produtos, os requisitos de recursos, bem como as disponibilidades semanais destes encontram-se na TAB. 2-II.

TABELA 2-II

Requisitos de recursos por tipo de produto (mochila)

Produto	Tecido de nylon m^2	Jogo de fivelas	Jogo de zíperes	Forro m^2	Preço R$
Pequena	0,75	1	1	0,90	38,00
Média	1,25	1	1	1,50	55,00
Grande	2,00	1	1	2,50	125,00
Disponibilidades	1.300	400; 600; 100	250; 600; 200	1.400	

O nylon é adquirido por R$21,00/$m^2$, o forro por R$3,70/m^2, um jogo de fivelas para cada mochila pequena, média ou grande, custa, respectivamente, R$1,53, R$1,65 e R$1,95. Os zíperes são adquiridos a R$2,00, R$2,20 e R$2,40, respectivamente. A alíquota do imposto estadual é de 17% e do imposto federal é de 5%.

Sabe-se que qualquer mochila requer 50 minutos de mão-de-obra de processamento, e que a capacidade do pessoal da

produção para a próxima semana será de 950 mochilas. A previsão é de que o mercado absorverá, semanalmente, até 300 mochilas pequenas, entre 450 e 550 mochilas médias e até 150 mochilas grandes.
Quanto de cada mochila deverá ser produzida na próxima semana para que o empresa maximize a sua margem de contribuição? Modele o problema na forma de um PPL.

O Imposto Federal (IF) tem a seguinte formulação:
• IF = (alíquota federal * preço)/(1+alíquota federal)
• O Imposto Estadual (IE) tem a seguinte formulação:
• IE = alíquota estadual * (preço - IF)
A fábrica compensa o valor do imposto estadual recolhido no momento da aquisição da matéria-prima.

7) Um fabricante de artigos eletrônicos tem distribuidores que deverão receber rádios e calculadoras eletrônicas para formar o estoque para a época de Natal. Os rádios e calculadoras eletrônicas requerem diodos e resistores e passam por uma máquina de teste. Cada rádio requer 4 diodos e 4 resistores, e cada calculadora requer 10 diodos e 2 resistores. Cada rádio exige 12 minutos da máquina eletrônica de teste, e cada calculadora, 9,6 minutos. O gerente de produção tem para os próximos dois meses apenas 160 horas disponíveis da máquina de teste para esses dois artigos. O suprimento da empresa pode contar com 8.000 diodos e 3.000 resistores nesse período. Sabendo-se que a demanda pode absorver toda a produção do fabricante, qual deverá ser a quantidade a produzir de cada artigo de forma a proporcionar o maior lucro possível? Os lucros unitários são de R$15,00 para a calculadora e R$10,00 para o rádio. Resposta final: lucro máximo $\cong$ R$12.900,00.

8) Uma empresa do setor de laticínios fechou um contrato de fornecimento de leite com um fazendeiro. Esse terá de oferecer pelo menos 15.000 litros de leite mensalmente, podendo ser leite tipo C de vaca, leite tipo B de vaca e leite de cabra, com as seguintes condições: o mínimo de 2.000 litros deve ser leite de cabra e o máximo de 3.000 litros leite B de vaca. Para cada litro de leite de cabra é necessário alimentar o animal com uma unidade padrão de milho, e para cada litro de leite de vaca basta um terço desta unidade, seja para produzir o leite tipo C ou tipo B, pois a distinção entre esses é somente na maneira de realizar a ordenha: manual o C e mecânica o B. Dispõe-se de 8.100 unidades mensais de milho. Cada litro de leite de cabra permite US$0,16 de lucro, um litro de leite C permite US$0,04 e um litro de leite B, US$0,12 de lucro. Sabendo-se que uma cabra produz 3,5 litros de leite por dia e uma vaca produz 8 litros, quantas vacas ou cabras para cada tipo de leite o fazendeiro precisa ter em lactação para otimizar seu lucro?

9) Uma firma produz dois artigos de limpeza profissional em automóveis: *limpex* e *brilhex*. De cada caixa de *limpex* e *brilhex*, os lucros obtidos são, respectivamente, de R$100,00 e R$300,00. Os produtos exigem os processos de blendagem e de homogeneização. O *limpex* requer 4 horas no primeiro e 8 no segundo, e o *brilhex* requer 6 e 4 horas, respectivamente. Durante uma semana, as seções de blendagem e de homogeneização dispõem de 12 horas-máquina e de 16 horas-máquina para o processamento dos dois produtos. Considerando que a demanda é ampla, quantos lotes de cada produto devem ser produzidos para obter o lucro máximo? Resolva pelo método gráfico.

10) Uma firma produz cera limpadora e polidor para automóveis. Os lucros são, respectivamente, de R$10,00 e R$30,00 por caixa vendida de 20 kg ao comerciante. Ambas exigem os processos de mistura e de homogeneização. Uma tonelada de cera exige 4 horas no misturador e 8 horas no homogeneizador, e uma tonelada de polidor exige 6 horas no misturador e 4 no homogeinizador. A empresa opera 44 horas semanais e possui três misturadores e 4 homogeneizadores. Enquanto o mercado absorve 7 caixas de cera, no máximo uma caixa de polidor é vendida. Quantas caixas de cada produto devem ser produzidas semanalmente para que a firma alcance o lucro máximo?

11) Você é o gerente de produção de uma retificadora de motores. São retificados os motores MWM e Pérquins. Ambos exigem as operações de usinagem e montagem. O departamento de produção dispõe de 6 máquinas de usinagem e 18 homens na montagem. A empresa trabalha 40 horas semanais. Um motor MWM exige 4 horas de usinagem e duas horas-homem na montagem, e um motor Pérquins exige 06 horas de usinagem e 1,5 horas-homem na montagem. Os lucros líquidos do serviço de retífica de cada um dos motores são, respectivamente, de R$40,00 e R$50,00. Sabendo-se que a procura por serviços excede a capacidade de produção, quantos motores de cada tipo a empresa deveria aceitar, semanalmente, para alcançar o máximo lucro?

12) Resolva o exemplo 2.4 por meio do método Simplex. Pergunta: o número máximo possível de máquinas a montar na semana é 44 ou é 22?

13) A firma de móveis modulados FMM fabrica seus componentes em três cidades: Campinas, São Carlos e Pirassununga. As quatro centrais de montagem e distribuição estão em: Bauru, São José do Rio Preto, Jales e Araraquara. Os custos de transporte para cada metro cúbico nessa rede de transportes, as capacidades de oferta e as necessidades semanais das centrais, encontram-se na tabela 2 (em R$). Determine as quantidades a serem alocadas a cada itinerário para que seja atingido custo mínimo. Resposta: custo mínimo: R$610,00.

TABELA 2-III
Capacidades de oferta e necessidades semanais da FMM

				Centrais	
Capacidades das fábricas (m^3)	Origens	Bauru	São José do Rio Preto	Jales	Araraquara
50	Campinas	3	5	7	4
50	São Carlos	6	8	5	2
50	Pirassununga	1	9	7	3
Necessidades das Centrais		20	60	30	40

REFERÊNCIAS

BREGALDA, P. F. et al. *Introdução à programação linear*. Rio de Janeiro: Campus, 1983.

BROOKE, A.; KENDRIK, D.; MEERAUS, A. *GAMS*: sistema geral de modelagem algébrica. São Paulo: E. Blucher, 1997.

BROOKE, A. et al. *Pesquisa operacional*. São Paulo: Atlas, 1988.

EHRLICH, P. J. *Pesquisa operacional*. São Paulo: Atlas, 1988.

GAMS. Washington, 2007. Disponível em: <http://www.gams.com/>. Acesso em: 15 mar. 2008.

MACULAN FILHO, N.; PEREIRA, M. V. F. *Programação linear*. São Paulo: Atlas, 1980.

NOVAES, A. G. *Métodos de otimização*: aplicação aos transportes. São Paulo: E. Blucher, 1978.

Capítulo 3

Análise de decisão probabilística

Neste capítulo serão apresentados: (1) análise de decisão bayesiana; (2) decisão e processos markovianos; (3) árvore de decisão; (4) simulação Monte Carlo; (5) exercícios e referências.

O objetivo é oferecer ao leitor alguns instrumentos quantitativos probabilísticos para analisar alternativas de decisão em problemas de projeção de demanda.

1. Análise de decisão bayesiana

Decisão é a escolha do ato, que para ser executado, requer do tomador de decisão a passagem por um processo de tomada de decisão. Nesse processo, quem precisa decidir deve recorrer a algum método de análise de decisão.

A análise de decisão bayesiana refere-se às técnicas que requerem o conhecimento do teorema de Bayes (BLACKWELL, 1974), que diz respeito à determinação da probabilidade condicional de um evento, dado que outro evento tenha ocorrido (QUADRO 3.1).

A análise de decisão bayesiana constitui-se na aplicação de métodos quantitativos que orientam o tomador de decisões a escolher a melhor alternativa, diante de diferentes atos possíveis e sob condições de incerteza. Tais métodos requerem a existência das probabilidades dos eventos, obtidas dos dados objetivos ou subjetivos. Para a compreensão desses métodos, são importantes os seguintes conceitos:

QUADRO 3.1

Eventos dependentes – Teorema de Bayes

Se dois eventos são dependentes, o conceito de probabilidade condicional é empregado para indicar a probabilidade de ocorrência de um evento relacionado. Se desejamos determinar a probabilidade de "β" dado "α", representado por $P(\beta/\alpha)$, "α" é dado como ocorrido e "β" dependerá daquela ocorrência. Assim, a determinação de $P(\beta/\alpha)$, probabilidade de ocorrer "β", condicionada à ocorrência de "α", segue o Teorema de Bayes, que é:

$P(\beta/\alpha) = Pd(\alpha \text{ e } \beta) / P(\alpha)$

Sendo:

$Pd(\alpha \text{ e } \beta)$, a probabilidade de ocorrer "α" e "β" para eventos dependentes e $P(\alpha)$, a probabilidade de ocorrer "α".

Exemplo 1:

Considere uma urna com seis bolas pretas e quatro bolas brancas. Se duas bolas são retiradas, uma depois da outra, não havendo a reposição da primeira, qual é a probabilidade de sacar sucessivamente duas bolas pretas?

Sejam:

P(A) = probabilidade de sacar a primeira sendo ela uma bola preta = 6/10

Pd(A e B) = probabilidade da primeira e da segunda serem pretas em eventos dependentes;

P(A/B) = probabilidade da segunda bola ser preta tendo ocorrido da primeira sacada ter sido preta = 5/9;

Pd(A e B) = P(A) x P(A/B)

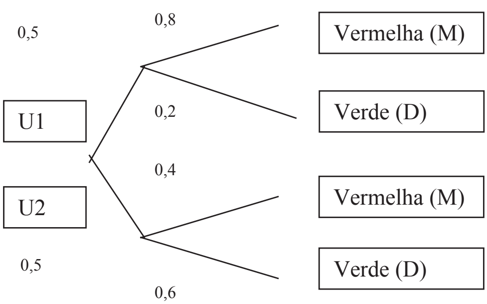
Pd(A e B) = 6/10 x 5/9 = 30/90 = 3/9 = 0,3333

Se dois eventos são dependentes, o conceito de probabilidade condicional é empregado para indicar a probabilidade de ocorrência de um evento relacionado. Se desejamos determinar a probabilidade de “β” dado “α”, representado por $P(\beta/\alpha)$, “α” é dado como ocorrido e “β” dependerá daquela ocorrência. Assim, a determinação de $P(\beta/\alpha)$, probabilidade de ocorrer “β”, condicionada à ocorrência de “α”, segue o Teorema de Bayes, que é:
$P(\beta/\alpha) = Pd(\alpha \text{ e } \beta) / P(\alpha)$
Sendo:
$Pd(\alpha \text{ e } \beta)$, a probabilidade de ocorrer “α” e “β” para eventos dependentes e $P(\alpha)$, a probabilidade de ocorrer “α”.

Exemplo 1:
Considere uma urna com seis bolas pretas e quatro bolas brancas. Se duas bolas são retiradas, uma depois da outra, não havendo a reposição da primeira, qual é a probabilidade de sacar sucessivamente duas bolas pretas?

Sejam:
P(A) = probabilidade de sacar a primeira sendo ela uma bola preta = 6/10
Pd(A e B) = probabilidade da primeira e da segunda serem pretas em eventos dependentes;
P(A/B) = probabilidade da segunda bola ser preta tendo ocorrido da primeira sacada ter sido preta = 5/9;
Pd(A e B) = P(A) x P(A/B)
Pd(A e B) = 6/10 x 5/9 = 30/90 = 3/9 = 0,3333

FIGURA A-1 – Adaptado de Kazmier (1982)



A importância do Teorema de Bayes encontra-se na aplicação a eventos seqüenciais e, além disso, o teorema permite a determinação da probabilidade condicional de um evento ter ocorrido na primeira posição da seqüência, mesmo que apenas a ocorrência da segunda posição da seqüência tenha sido observada. A representação estatística é:

$$P(\alpha/\beta) = \frac{P(\alpha) \times P(\beta/\alpha)}{P(\alpha) \times P(\beta/\alpha) + P(\alpha') \times P(\beta/\alpha')}$$

Exemplo 2: Suponha que duas urnas, U1 e U2 , a primeira com oito bolas vermelhas e duas verdes e a segunda com quatro vermelhas e seis verdes, estejam a disposição para um sorteio. Se uma urna é selecionada ao acaso (primeiro passo da seqüência) e desta urna é retirada uma bola (segundo passo), qual é a probabilidade da U1 ter sido selecionada na primeira posição da seqüência, sendo a bola sacada (no segundo passo) de cor verde? A FIG. A-1 ilustra o caso.

Solução:

$$P(U1/D) = \frac{P(U1) \times P(D/U1)}{P(U1) \times P(D/U1) + P(U2) \times P(D/U2)}$$

Sendo: $P(U1) = 0{,}5;$
$P(U2) = 0{,}5;$
$P(D/U1) = 0{,}2;$
$P(D/U2) = 0{,}6;$
Tem-se: $P(U1/D) = 0{,}25.$

• Tabela de decisão: ela é um instrumento utilizado para identificar ganhos ou perdas condicionais associados às possíveis combinações de *atos* e *eventos*. Necessariamente contempla os resultados econômicos estimados para cada combinação *ato/evento*, mas pode constar também das probabilidades de ocorrência de cada um dos eventos mutuamente exclusivos.

• Atos: são os caminhos alternativos de ação (estratégias), disponíveis ao tomador de decisão.

• Eventos: são os nós que indicam as possíveis ocorrências fora do controle do tomador de decisões.

Métodos com base apenas em probabilidades

a) Escolha com base no evento de máxima probabilidade

Consiste em identificar o *evento* que tem a máxima probabilidade de ocorrência, escolher o *ato* que o cumpra em valores físicos e também dê o maior retorno econômico.

b) Escolha com base na demanda esperada

Consiste em realizar o cálculo da demanda esperada e escolher o *ato* que mais se aproximar e proporcionar o maior retorno econômico.

Exemplo 3.1 – Encomenda de chinelas em um supermercado

Em um supermercado, sabendo que no próximo verão pode ocorrer demanda variada, quantas chinelas de praia devem ser encomendadas, sendo que os pedidos devem ser feitos em lotes de 2.500 pares? A TAB. 3.1 apresenta as informações necessárias.

TABELA 3.1
Lucros ao supermercado previstos para o período (R$)

Demanda (eventos)	Probabilidades		Encomendas (atos)	(pares)	
(pares)		10.000	12.500	15.000	17.500
10.000	0,10	10.000,00	9.000,00	8.400,00	7.900,00
12.000	0,30	9.500,00	11.500,00	11.000,00	9.700,00
13.000	0,40	9.100,00	12.000,00	11.500,00	10.500,00
16.000	0,20	8.500,00	11.300,00	14.500,00	15.000,00

a) Decisão pelo método da Máxima Probabilidade:

A máxima probabilidade é 0,40. A demanda (evento) correspondente é de 13.000 pares de chinelas, mas para garantir o cumprimento da demanda e obter o maior retorno econômico, recomenda-se pedir 15.000 pares (ato).

b) Decisão sobre método da Demanda Esperada

O cálculo da demanda esperada é:

E(D) = 0,1 x 10.000 + 0,3 x 12.000 + 0,4 x 13.000 + 0,2 x 16.000 = 13.000 pares (evento), então recomenda-se escolher a alternativa mais próxima, que dê o maior retorno econômico. Logo, deve-se encomendar 12.500 pares (ato).

Métodos com base apenas nas consequências econômicas

a) Maxmin (pessimista): escolher, entre os diferentes *eventos,* aquele que dispor do mínimo valor econômico e, entre os *atos* escolher o que dispor de máximo valor, que será o ato de decisão.

b) Maxmax (otimista): escolher, entre os diferentes *atos,* aquele que dispor do máximo valor.
c) Arrependimento minimax: pressupor que um *evento* em particular ocorrerá e escolher o melhor *ato* e adotá-lo como referência. Identificar a perda relativa dos vários atos correspondentes àquele *evento*. Elaborar raciocínio análogo em relação aos outros *eventos*. Em seguida, destacar as máximas perdas para cada *ato* e dentre as máximas perdas, escolher a menor, assim essa indicará o *ato* a ser adotado na decisão.

Exemplo 3.2 – Aplicação dos métodos desconsiderando a probabilidade

Resolvendo o mesmo problema do exemplo 3.1 pelos métodos com base apenas nas consequências econômicas, tem-se:
a) Maxmin: parte do menor retorno econômico de todas as opções. No caso, R$7.900 é o mínimo valor que corresponde ao evento 10.000 pares de encomenda, então admite-se que vai ocorrer uma demanda de 10.000 pares (evento). Escolhe-se a alternativa que oferece o maior retorno econômico, nesse caso é R$10.000,00, então deve-se encomendar 10.000 pares (ato);
b) Maxmax: observa-se, simplesmente, o maior retorno econômico de todas as alternativas, sem atentar para os eventos que é R$15.000,00, logo deve-se encomendar 17.500 pares (ato).
c) Arrependimento minimax: esse método exige encontrar valores de arrependimento ou perdas relativas, encontrados na TAB. 3.2.

TABELA 3.2
Perdas relativas entre os vários atos e o ato de maior valor para cada evento

Demanda (eventos)	Probabi-lidades			Encomendas (atos)	
		10.000	12.500	15.000	17.500
10.000	0,1	0	1.000,00	***1.600,00***	***2.100,00***
12.000	0,3	2.000,00	0	500,00	1.800,00
13.000	0,4	2.900,00	0	500,00	1.500,00
16.000	0,2	***6.500,00***	***3.700,00***	500,00	0

Para cada evento da TAB. 3.1 escolhe a célula de melhor retorno econômico e toma essa como referência para o cálculo das perdas relativas correspondentes a todos os outros atos. Destacam-se as maiores perdas relativas para cada coluna (ato) e escolhe-se a menor perda máxima para indicar o ato pelo qual deve-se decidir. Nesse exemplo, R$1.600,00 é a menor perda relativa máxima, assim se deve encomendar 15.000 pares (ato).

MÉTODO COM BASE EM CONSEQUÊNCIAS ECONÔMICAS E PROBABILÍSTICAS

Esse método baseia-se no critério do valor esperado (VE), em que se decide pelo ato indicar o melhor resultado econômico esperado. Determina-se o somatório do valor esperado para cada combinação ato/evento, para cada coluna (ato), e decide-se pelo melhor resultado.

Exemplo 3.3 – Aplicação dos métodos que consideram consequências econômicas e probabilidades

Resolvendo o mesmo problema do exemplo 3.1 utilizando o critério do valor esperado, têm-se os resultados apresentados na TAB. 3.3. Dessa deve-se optar pela combinação ato/evento que proporcione o melhor retorno econômico esperado.

TABELA 3.3
Valores esperados para os atos

Eventos	Probabi-		Encomendas	(atos)	
	lidades	10.000	12.500	15.000	17.500
10.000	0,10	10.000,00	9.000,00	8.400,00	7.900,00
12.000	0,30	9.500,00	11.500,00	11.000,00	9.700,00
13.000	0,40	9.100,00	12.000,00	11.500,00	10.500,00
16.000	0,20	8.500,00	11.300,00	14.500,00	15.000,00
Valor esperado		9.190,00	11.410,00	11.640,00	10.900,00

Assim: $VE_{(10.000)}$, que se lê valor esperado pelo ato de encomendar 10.000 pares de chinelas é $VE_{(10.000)}$= R\$9.190,00. Analogamente, $VE_{(12.500)}$=R\$11.410,00; $VE_{(15.000)}$=R\$11.640,00 e $VE_{(17.500)}$=R\$10.900,00. Portanto, deve-se encomendar 15.000 pares.

2. Decisão e processos markovianos

Conceitos de estado, elemento, passo e transição

• Estado: é a condição em que se situa cada elemento que interfere nas probabilidades dos eventos.
• Elemento: pode ser um consumidor, um fornecedor ou um competidor, ou outro ente capaz de influenciar nas probabilidades dos eventos entre dois ou mais momentos distintos.
• Passo: é uma etapa de um conjunto de etapas sequenciais

de um processo de decisão multi-estágios. O ponto inicial do processo de decisão é o passo zero. As etapas ocorrem em momentos subsequentes.

• Transição: é a passagem prevista para o elemento mover-se de um passo para outro subsequente, em que poderá ou não ter alterado o seu estado. Uma transição pressupõe a existência de um conjunto de estados possíveis e das probabilidades do elemento manter-se ou alterar de estado ao mover-se do passo atual para o passo seguinte. Pressupõe-se que as transições futuras possam ser ponderadas de maneira probabilística. Transições sucessivas exigem uma sequência de decisões.

Decisão e cadeias de markov

As cadeias de Markov podem ser usadas para processos que envolvem modelos físicos ou econômicos que garantam as seguintes propriedades:

1) o conjunto de sucessos possíveis é finito.
2) a probabilidade do próximo sucesso dependerá apenas do sucesso imediatamente anterior.
3) essas probabilidades são constantes no tempo.

Um processo de Markov consiste em um conjunto de elementos e um conjunto de estados, tal que:

> I) a qualquer tempo, cada elemento deve estar em um estado. Elementos distintos não precisam estar em estados diferentes;
>
> II) a probabilidade de que um elemento passe de um estado para outro em um período de tempo depende somente desses dois estados.

Muitos problemas de decisão compõem-se de sucessos discretos e probabilísticos que dependem as um resultado anterior. São exemplos: os problemas de estoques, que sofrem os efeitos probabilísticos de demanda e de tempo de reposição; de filas de espera, que sofrem os efeitos probabilísticos do número de chegadas de clientes por intervalo de tempo e de tempos de atendimento dos postos de serviço e os modelos de marketing, que sofrem os efeitos probabilísticos das ações dos clientes e dos competidores.

Os conceitos de Cadeias de Markov são adequados para a análise de problemas probabilísticos do gênero. O exemplo 3.4 mostra um problema relacionado à área mercadológica em que se deseja prever a repartição futura de mercado de automóveis médios.

Exemplo 3.4 – Tendências na demanda do mercado para veículos

Uma montadora de veículos interessa analisar as probabilidades de o cliente adquirir o veículo da sua marca nas próximas decisões e verificar como essas probabilidades podem afetar a participação de sua empresa no mercado em alguma data futura. O mercado a ser analisado é o de usuários de carros médios. Três automóveis participam desse mercado: Fiesta, Corsa e Siena, originários de três fabricantes distintos. Considere que essas marcas e modelos de veículos constituem-se em todo o universo de possibilidades para os clientes optarem no momento das suas decisões.

As questões de interesse seriam: (1) Qual é a probabilidade de um proprietário do automóvel Siena vir a adquirir um Fiesta na sua próxima troca de automóvel? E na segunda troca? (2) Mantendo-se as atuais condições ao longo do tempo, qual seria a participação do fabricante do Fiesta no referido mercado em data futura? (Adaptado de Shablim; Stevens Júnior, 1987, p.69).

A análise pode-se dar pelo do cálculo de probabilidades (árvore de sucessos) ou pelo conceito de Cadeias de Markov.

Cada ocorrência gera um estado (modelo de veículo) e cada decisão possível para o cliente (elemento) implica em uma transição (de um passo para outro), podendo o elemento manter ou alterar o estado no passo subsequente. Três estados podem ocorrer com o cliente do segmento de automóveis médios: ter um Fiesta, um Corsa ou um Siena.

Admita que toda vez que o elemento enfrenta um processo de decisão, quando se encontra em um determinado estado e que há possibilidades dele estar em qualquer dos estados em um passo qualquer no futuro, ele parte do passo atual. Ao prever a execução de uma decisão, as probabilidades desse elemento estar em diferentes estados já estão dadas, e por isso a transição pode ser ponderada.

A decisão do usuário do veículo é influenciada pelo modelo que tem atualmente, naturalmente se o veículo agrada-o. A probabilidade dele se manter no modelo e na marca será maior se o veículo lhe proporcionar alguma contrariedade. A TAB. 3.4 apresenta as proporções dos proprietários de um determinado veículo que adquiriram um dos três tipos de veículos que se encontravam disponíveis na última decisão. Pode-se compreender a tabela como o quadro que mostra o comportamento dos adquirentes de veículos no momento da compra, durante o último ano no país.

TABELA 3.4

Compras dos clientes dos carros médios

Possuíam o	Compraram o Fiesta (%)	Compraram o Corsa (%)	Compraram o Siena (%)
Fiesta	40	30	30
Corsa	20	50	30
Siena	25	25	50

As probabilidades de um cliente qualquer exercer a transição: ter um veículo agora e outro após o próximo processo de decisão, podem ser representadas por uma matriz de transição, construída com base em uma tabela de probabilidades.

Considere a TAB. 3.5, em que S_i identifica o estado para o passo 0 e S_j o estado para o passo 1; com *i* e *j* variando de *1* até *m*, sendo "*m*" o número de estados e "*n*" o número de passos.

TABELA 3.5

Probabilidades – matriz de transição

S_j / S_i	S_1	S_2	S_3
S_1	0,40	0,30	0,30
S_2	0,20	0,50	0,30
S_3	0,25	0,25	0,50

De maneira algébrica, a matriz de transição P, é representada por:

$$\boldsymbol{P} = \begin{vmatrix} 0,40 & 0,30 & 0,30 \\ 0,20 & 0,50 & 0,30 \\ 0,25 & 0,25 & 0,50 \end{vmatrix}$$

A TAB. 3.5 apresenta as probabilidades p_{ij} para a transição do elemento desde o passo zero (atualmente) até o passo um (futuro imediato). O primeiro interesse da questão (1) é encontrar para esta transição, a probabilidade de passar do estado possuidor de Siena para o estado possuidor do Fiesta, informação obtida diretamente da matriz de transição $(p_{ij}=p_{31})$.

$$p_{31} = 0,25$$

Então, há 25% de probabilidade do usuário possuidor do Siena adquirir o Fiesta na próxima decisão de compra.

Observe que a soma de todas as probabilidades de aquisição precisa somar 100%.

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \quad \rightarrow \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1 \qquad (3.1)$$

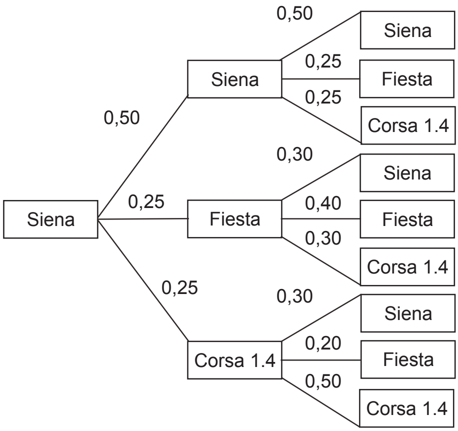
Árvore de sucessos

Quanto ao segundo interesse da questão (1), que refere-se à segunda transição (mudar do passo 1 para o passo 2), pode-se utilizar o cálculo de probabilidades ou a árvore de sucessos (figura 3.1) e chegar à resposta com os dados da TAB. 3.6.

TABELA 3.6
Transições do consumidor do Siena para o Fiesta

Do passo 0 para o passo 1	Primeira transição	Do passo 1 para o passo 2	Segunda transição	Probabilidade conjunta
Fiesta	0,25	Fiesta	0,40	0,100
Corsa	0,25	Fiesta	0,20	0,050
Siena	0,50	Fiesta	0,25	0,125
probabilidade de	quem tem um Siena	ter um Fiesta após	a segunda troca	0,275

FIGURA 3.1 – Árvore de sucessos possíveis em dois passos



Cadeias de Markov

Considere V_i^n o vetor de probabilidades após a n-ésima transição de quem encontra-se atualmente (n=0) no estado "i". A tabela 3.5 mostrou a matriz de transição com elementos p_{ij}^2

No exemplo em consideração temos três estados possíveis para cada elemento que se encontra inicialmente (passo zero) no i-ésimo estado cair no futuro. Então, para a n-ésima transição o vetor de probabilidades será do tipo:

$$V_i^n = (p_{i1}^n, p_{i2}^n, p_{i3}^n)$$

No caso em análise, a preocupação é chegar às probabilidades do cliente estar no passo 3, momento de conclusão da segunda transição, no estado possuidor do Fiesta. Este estado é o primeiro dos três apresentados na tabela 3.4. Então, o interesse é saber qual é p_{31}^2; a probabilidade do possuidor atual do modelo Siena ter um Fiesta após duas transições ao concluir a segunda troca de automóvel? Essa probabilidade faz parte do vetor de probabilidades V_3^2.

Mediante a análise de Cadeias de Markov:

1) ao mudar do passo 0 (n=0) para o passo 1 (primeira transição, n=1), sendo "i" igual a 3 (veículo Siena), o vetor de probabilidades é: V_3^1 = (0,25, 0,25, 0,50).

2) ao mudar do passo 1 (n=1) para o passo 2 (segunda transição, n=2), as probabilidades do consumidor em cada estado são demonstradas pelo vetor V_3^2, que significa o vetor de probabilidades após a segunda troca de veículos, para aquele que se encontra atualmente (n=o) no estado "i" (para i=3, estar com o veículo Siena).

Generalizando, V_i^n é o vetor de probabilidades após a n-ésima transição de quem encontra-se atualmente (n=0) no estado "i".

$$
\begin{aligned}
&P \\
&= V_3^1 \times P \\
&= (0{,}25 \quad 0{,}25 \quad 0{,}50) \times \begin{vmatrix} 0{,}40 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}20 & 0{,}50 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}50 \end{vmatrix} \\
&= (0{,}275 \; 0{,}325 \; 0{,}400)
\end{aligned}
$$

A probabilidade conjunta do proprietário do veículo Siena (estado 3), no passo presente (n=0), adquirir o veículo Fiesta (estado 1) após a segunda transição (passo número 3) é de 0,275. Observe que o cliente, que no passo zero (atual) possui um Siena, poderá passar por outro modelo e marca (estado) no passo 1, mas no passo 2, 27,5% é a probabilidade dele ter um Fiesta.

Considere:

$V_i^n =$ vetor que descreve as probabilidades para "n-ésimo" passo, sendo n ≥ 2, sendo o estado presente, passo zero, S_i.

Para o passo número 3, tem-se:

$$
\begin{aligned}
V_i^3 &= V_i^2 \times P \\
V_i^2 &= V_i^1 \times P \\
V_i^3 &= (V_i^1 \times P) \times P
\end{aligned}
$$

Assim:

$$V_i^n = V_i^{n-1} \times P = (V_i^1 \times P^{n-2}) \times P \tag{3.2}$$

$$V_i^n = V_i^1 \times P^{n-1} \tag{3.3}$$

Vetor de distribuição ou de participação [V_p]

Em problemas que exigem estimativas de distribuição do mercado, o vetor de distribuição mede a participação de cada agente no mercado correspondente.

O produto entre o vetor de participação atual [$V_{p(o)}$] e a matriz de transição P oferece o vetor de participação previsto para o momento imediatamente após a ocorrência da transição [$V_{p(1)}$].

$$V_{p(1)}=V_{p(o)}\times \tag{3.4}$$

Para a segunda transição $V_{p(2)}$ seria:

$$V_{p(2)}=V_{p(1)}\times P \tag{3.5}$$

e assim, sucessivamente, para as transições seguintes.

Com referência ao exemplo 3.4, se os respectivos fabricantes dos automóveis Fiesta, Corsa e Siena, compõem a totalidade dos fabricantes de carros médios, com as participações correspondentes de 30%, 40% e 30% no mercado, o vetor de participação atual [$V_{p(o)}$] seria $V_{p(o)}$ = (0,3, 0,4, 0,3). Lembrando a questão (2) colocada no enunciado do exemplo 3.4, qual seria a participação prevista para o fabricante do Fiesta no próximo ano?

Tem-se a resolução com o uso da equação (3.4):

$$V_{p(1)}= (0,3 \quad 0,4 \quad 0,3) \times \begin{vmatrix} 0,40 & 0,30 & 0,30 \\ 0,20 & 0,50 & 0,30 \\ 0,25 & 0,25 & 0,50 \end{vmatrix}$$

o que proporciona os seguintes resultados: fabricantes do Fiesta, Corsa 1.4 e Siena, com participações, respectivamente, de: 27,5%, 36,5 % e 36%.

3. ÁRVORE DE DECISÃO

Problemas de decisão de investimento, de estratégias de produção ou distribuição, de definição de marcas para o produto e de lançamento do produto são alguns exemplos em que se pode usar a técnica de árvore de decisão para obter indicativos de solução.

As consequências de uma decisão são, frequentemente, afetadas por eventos que ocorrem após a decisão inicial. Isso conduz à necessidade de decisões adicionais. A avaliação dos atos de decisão iniciais deve estruturar-se na avaliação dos eventos e decisões previsíveis para o processo de decisão como um todo.

A análise por meio da árvore de decisão, que se baseia no critério do valor esperado, é o método que possibilita identificar o melhor ato inicial e os melhores atos subsequentes.

Regras para a construção de uma árvore de decisão

O analista, ao confeccionar a árvore de decisão, deve:

1) partir da esquerda para a direita;

2) identificar e distinguir os pontos de decisão (ato) e os eventos (fora do controle do dirigente) adotando alguma forma de símbolos, por exemplo:

Ato ou ponto de decisão → ○

Evento ou ponto fora do controle → □

3) a cada nó de eventos, verificar se a somatória das probabilidades é 1;

4) especificar as probabilidades associadas aos eventos;

5) ponderar os desfechos, valores finais para cada ramo de evento ou consequência de nó de decisão;

6) calcular os valores esperados, soma das importâncias monetárias ponderadas com as respectivas probabilidades, da direita para a esquerda, até o nó de decisão inicial;

7) em cada nó de decisão, eliminar alternativas de modo a ficar com uma única decisão.

Exemplo 3.5 – Lançamento de nova linha de refeições prontas

Uma companhia produtora de refeições prontas, *Pratik Food*, está com o propósito de lançar uma nova linha de produtos para ser colocada nos supermercados. Um teste limitado a um grupo de donas de casa indicou que a nova linha é considerada igual às dos concorrentes em muitos aspectos e superior em alguns. O departamento de marketing da empresa analisou o assunto e considera que a probabilidade de um lançamento com sucesso em todo o país é de 0,3 e, neste caso, o lucro anual, o valor presente, seria de R$3,00 milhões. Um fracasso representaria um prejuízo de R$250 mil. Na prática, a companhia teria uma longa série de possíveis decisões a tomar. Essas abrangeriam desde novos testes de aceitação pública até o planejamento e o cronograma da campanha de comercialização. Talvez os dirigentes teriam de repensar a programação da produção, o *lay-out* da fábrica, a instalação de uma nova unidade fabril e a sua localização, assim como os esquemas de suprimento e de distribuição.

Para a utilização da técnica de árvore de decisão como instrumento de análise do problema, suponha que a empresa resolva considerar três alternativas: (1) abandonar a idéia ou (2) lançar o produto ou (3) testá-lo em uma pesquisa de mercado.

Abandonar a idéia significaria um resultado nulo. Lançar o produto poderia proporcionar o sucesso, com a probabilidade de 0,3 (R$3,00 milhões) ou o fracasso com a probabilidade de 0,7 (-R$250 mil). Aplicar um teste de mercado custaria R$50 mil e, nesse caso, três desfechos seriam possíveis: a) menos de 10% do público experimentará o novo produto; b) mais de 10% das pessoas pesquisadas o experimentarão,

porém menos de 50% das que o experimentaram voltarão a comprá-lo em ocasião subsequente;
c) mais de 10% experimentarão o novo produto, e o índice de renovação da compra será de 50% ou mais;

Para cada desfecho desses, a empresa poderá realizar uma nova análise, sendo possíveis a desistência do lançamento ou a realização do lançamento.

As probabilidades de sucesso ou fracasso, como as probabilidades marginais de ocorrer cada um dos caminhos (a), (b) ou (c), são apresentadas na TAB. 3.7.

Resolução

A resolução do problema exigirá a confecção da árvore de decisão (FIG. 3.2) e o cálculo dos valores esperados de cada nó.
Iniciando a análise da árvore do final para o início, a partir do nó 7, pelo caminho (a), o valor monetário esperado é:

$$3.000\times\left(\frac{0,03}{0,50}\right)-250\times\left(\frac{0,47}{0,50}\right)=-55\ \text{mil}$$

Analisando o nó 8, pelo caminho (b), o valor monetário esperado é:

$$3.000\times\left(\frac{0,07}{0,25}\right)-250\times\left(\frac{0,18}{0,25}\right)=660\ \text{mil}$$

Analisando o nó 9, pelo caminho (c), o valor monetário esperado é:

$$3.000\times\left(\frac{0,20}{0,25}\right)-250\times\left(\frac{0,05}{0,25}\right)=2.350\,\text{mil (ou 2,35 milhões)}$$

Para o nó 4, a desistência tem valor esperado nulo, e o lançamento tem valor esperado negativo (-55 mil). Se o nó 4 está sob o controle da empresa e o tomador de decisão chegar nesse ponto, ele deverá desistir. Isso significa perder menos, pois o custo do teste já teria ocorrido (-50 mil).

Para o nó 5, a desistência tem valor esperado nulo, e o lançamento tem o valor esperado positivo (660 mil). Como o nó 5 é um ponto de decisão sob o controle da empresa, o tomador de decisão ao chegar nese ponto, deverá fazer o lançamento. De maneira análoga, se acaso o tomador de decisão chegar ao nó 6, ele deverá fazer o lançamento pois, neste caso, o valor esperado seria positivo (2.350 mil – caminho para o nó de eventos 9).

Avaliando o nó 3 que fora do controle da empresa, têm-se três valores esperados dos nós 4, 5 e 6, com as probabilidades marginais de 0,50, 0,25 e 0,25, respectivamente. Assim o valor bruto esperado para o nó 3 é:

$$0{,}50 \times 0 + 0{,}25 \times 660 + 0{,}25 \times 2.350 = 752{,}5 \text{ mil.}$$

Como o teste tem um custo de 50 mil, o valor líquido esperado para o nó 3 é: $752{,}5 - 50 = 702{,}5$ mil.

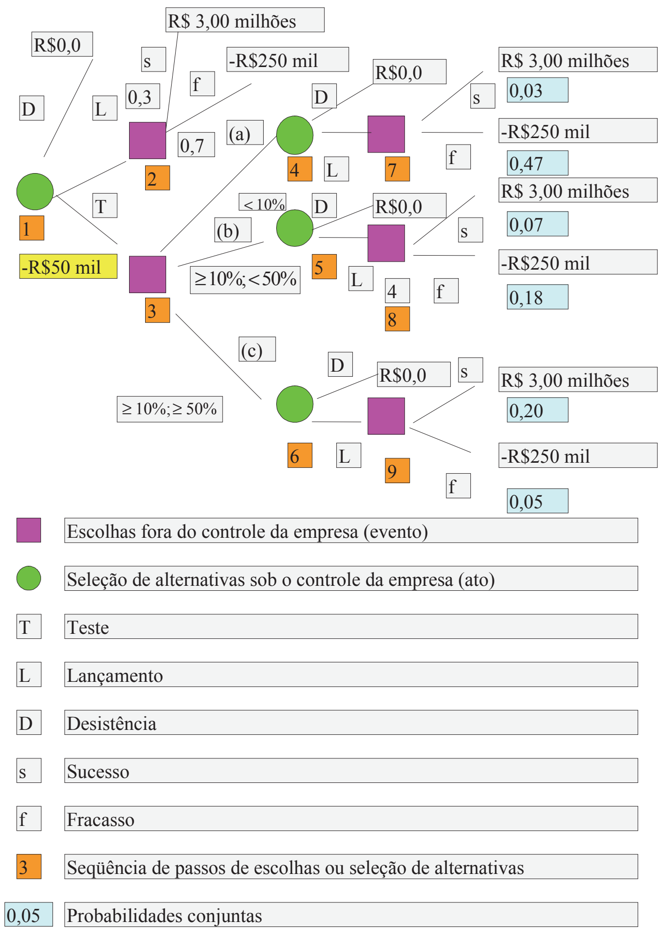
Analisando o nó 2, o valor esperado é:
$3.000 \times 0{,}3 - 250 \times 0{,}7 = 725$ mil.

Retrocedendo ao nó 1, a decisão deveria ser o lançamento imediato. Caso o custo do teste fosse inferior a 27,5 mil $(752{,}5 - 27{,}5 = 725)$, a decisão deveria ser pelo teste.

TABELA 3.7
Probabilidades de sucesso ou fracasso e probabilidades marginais dos caminhos (a), (b) e (c).

Probabilidades de:		Probabilidades conjuntas		
	(a)	(b)	(c)	Probabilidade
Sucesso	0,03	0,07	0,20	0,30
Fracasso	0,47	0,18	0,05	0,70
Probabilidade marginal	0,50	0,25	0,25	1,00

FIGURA 3.2 - Árvore de decisão para a Pratik Food



4. Simulação Monte Carlo

Simular é manipular um modelo (representação da realidade) simbólico (relações matemáticas), icônico (foto) ou analógico (um sistema hidráulico representando um sistema de tráfego), com o objetivo de inferir as consequências de possíveis interferências no sistema real.

A simulação Monte Carlo é uma técnica estocástica que tem características probabilísticas. Originalmente foi utilizada para resolver problemas de blindagem em reatores nucleares. É útil para a aplicação em problemas administrativos, tais como estoques, programação de produção e engenharia econômica. Ela, além disso, se torna viável com o uso de computadores.

Quando usar a simulação Monte Carlo?

- Quando for inviável fazer interferências no sistema real sem antes ter um indicativo das suas consequências.
- Quando o problema do sistema real for demasiadamente complexo, ou quando não for possível representá-lo por modelos determinísticos.
- Em problemas de filas probabilísticas, quando as distribuições de frequência das ocorrências de chegadas ou atendimentos não obedecem às distribuições teóricas que sustentam a teoria das filas.

Vantagens no uso da simulação Monte Carlo:

- Oferecer a percepção ao tomador de decisões de quais variáveis do sistema são as mais importantes e de como elas se interagem.
- Experimentar novas situações sobre as quais se tem pouca informação de seus resultados.
- Delinear novas políticas e regras de decisão para a operação de um sistema.

Fases na realização de uma simulação

1) Formulação do problema: definir os objetivos da simulação com vistas às restrições de recursos.

2) Identificação das variáveis e a coleta de dados: definir as variáveis a serem consideradas nas estatísticas, levando em conta o período de interesse e as tendências dos valores delas.

3) Escrita do modelo: construir as formulações matemáticas importantes para a análise do problema.

4) Elaboração do programa de computador, teste do programa e avaliação do modelo: programar o modelo em linguagens específicas de computadores ou em *softwares* comerciais, testar o modelo inicial e promover sucessivas interferências na base de dados, com o objetivo de expandir a percepção do tomador de decisões sobre as prováveis consequências de suas escolhas.

Exemplo 3.6 - Uma grande empresa revendedora de pneus para tratores trabalha com certo tipo de pneu, cuja demanda diária é de 40 pneus em média, variando de acordo com a TAB. 3.8. O contrato do revendedor com o fabricante garante uma entrega semanal de 240 unidades (semana de 6 dias), porém o fabricante tem dificuldades de entrega, o que acarreta atrasos em relação à data prometida. O atraso médio é de 2 dias e varia conforme a TAB. 3.9. O objetivo do revendedor é simular seus sistemas de estoque de forma a analisar a política de recebimento, face aos problemas de entrega do fabricante. Sabe-se que a estocagem custa, por dia, em juros, US$3,00 por pneu e US$2,00/dia/pneu, em custo administrativo. A perda da venda de um pneu, devido à falta, representa US$80,00. Calcule o custo total que a revendedora poderá ter com os estoques e com as faltas no período de 14 dias.

Dados necessários:
- nível inicial de estoques;
- demanda;
- atrasos;
- tamanho do pedido;
- datas prometidas de entrega.

Interesse: Determinar o custo total de estoques no período e estimar datas e atrasos possíveis para o recebimento, considerando as oscilações aleatórias, as datas prometidas das próximas entregas (quinto e décimo primeiro dias) e o saldo diário de estoques.

TABELA 3.8

Dados da demanda em 95 dias-pneus

(1) Demanda diária em número de pneus	(2) Ocorrências em número de dias	(3) Função densidade probabilidade	(4) Probabilidade cumulativa	(5) Números aleatórios de 1 a 1.000
25	5	0,053	0,053	1-53
30	10	0,105	0,158	54-158
35	19	0,200	0,358	159-358
40	28	0,295	0,653	359-653
45	19	0,200	0,853	654-853
50	10	0,105	0,958	854-958
55	4	0,042	1,000	959-1.000
	95			

TABELA 3.9

Dados da variação dos atrasos na entrega em 50 semanas

(1) Atrasos (dias)	(2) Ocorrências	(3) Densidade probabilidade	(4) Probabilidade cumulativa	(5) Números aleatórios
0	7	0,14	0,14	1-14
1	12	0,24	0,38	15-38
2	13	0,26	0,64	39-64
3	9	0,18	0.82	65-82

Continua na página 126

Continuação da página 125

(1) Atrasos (dias)	(2) Ocorrências	(3) Densidade probabilidade	(4) Probabilidade cumulativa	(5) Números aleatórios
4	5	0,10	0.92	83-92
5	2	0,04	0.96	93-96
6	1	0,02	0.98	97-98
7	1	0,02	1.00	99-100
	50	1,00		

Resolução

As TAB. 3.8 e 3.9 mostram os dados de entrada nas colunas (1) e (2) e o processamento destes dados que resultam nas informações das colunas (3), (4) e (5). As colunas (5), de ambas as tabelas, apresentam os intervalos de números aleatórios susceptíveis a serem correspondidos aos números aleatórios gerados em algum processo de sorteio de números ao acaso, com reposição, podendo ser um gerador de números aleatórios[3] ou urnas de bolinhas devidamente numeradas. A solução do exemplo apresenta duas urnas: uma de 1.000 bolinhas numeradas de 1 a 1.000 para a simulação da demanda e outra de 100 bolinhas numeradas de 1 a 100 para simular os atrasos da entrega do fornecedor. A TAB. 3.10 apresenta uma simulação dos atrasos, e a TAB. 3.11 apresenta uma simulação combinada (demanda e atrasos), que contempla os resultados da TAB. 3.10.

TABELA 3.10

Simulação para os dias de atraso

Datas de entrega prometidas	Sequência de entregas simuladas	Números aleatórios	Dias de atraso
5° DIA	1	46	2
11° DIA	2	82	3

[3] Veja o método aritmético de geração de números aleatórios em Andrade (1990, p.248).

TABELA 3.11

Simulação combinada de duas semanas e seus efeitos

(1) n-ésimo dia simulado	(2) Simulação da Demanda nº aleatório	(3) Chegadas simuladas (Tabela 2.10)	(4) Demandas diárias simuladas [coluna (2) e Tabela 3.8]	(5) Saldo simulado ao final do dia	(6) Custo de estoque simulado ao final do dia (US$)	(7) Custo de falta simulado ao final do dia (US$)
1	695	240*	-45	195	975	0
2	230		-35	160	800	0
3	540		-40	120	600	0
4	220		-35	85	425	0
5	990		-55	30	150	0
6	360		-40	-10	0	800
7	830	240	-45	195	975	0
8	490		-40	155	775	0
9	160		-35	120	600	0
10	320		-35	85	425	0
11	40		-25	60	300	0
12	730		-45	15	75	0
13	355		-40	-25	0	2.000
14	841	240	-45	195	975	0
Resultado	(do período	de 14 dias)	(US$)		7.075	2.800

*Considere que o estoque inicial corresponda a uma encomenda completa.

O resultado da simulação para o período de 14 dias indica que a primeira entrega deverá ocorrer no 7° dia (tabela 3.10), e a segunda entrega deverá ocorrer no14° dia. A soma dos custos de estocagem e de falta, colunas (6) e (7) da TAB. 3.11, resulta em um custo total previsto de R$9.875,00.

5. EXERCÍCIOS

1) Os dados da Associação Nacional de Fabricantes de Picapes *"short size"*, apresentados na tabela 3-I, mostram os percentuais de mudanças dos usuários dentro da categoria de veículos no último ano. Qual seria a probabilidade de um dono de Saveiro comprar uma Courier na próxima vez?

Resposta: 0,25

TABELA 3-I
Percentuais de manutenção ou mudanças da preferência do usuário quanto à marca da picape

De \ para	Courier	Corsa	Saveiro
Courier	40	30	30
Corsa	20	50	30
Saveiro	25	25	50

2) Foi apresentada a um fabricante uma proposta para um novo produto. Ele deve decidir se o desenvolve ou não. O custo do projeto de desenvolvimento do produto é de R$200.000. A probabilidade de êxito é de 0,7 e a de fracasso é de 0,3. Se o desenvolvimento do produto não tiver êxito, o projeto é terminado. Mas se tiver, o fabricante deve decidir

se começa a fabricar o produto a um nível baixo ou a um nível alto de produção. Se a demanda for elevada, o lucro adicional, dado um nível alto de produção, é de R$700.000; dado um nível baixo de produção, o lucro adicional é de R$150.000. Se a demanda for fraca, o lucro adicional, dado um nível alto de produção, é de R$100.000, dado um nível baixo de produção, o lucro é R$150.000.Todos esses valores de lucros adicionais são valores brutos, isto é, antes da subtração do custo de desenvolvimento de R$200.000. A probabilidade de uma demanda ser elevada é estimada em 0,40 e de uma demanda ser fraca é de 0,60. Construa a árvore de decisão e determine se o fabricante deve ou não tentar desenvolver esse produto.

3) A companhia produz uma chinela distribuída em todo o país, a “A baiana”. Vende geralmente 1.000.000 de pares anuais com um lucro unitário de R$0,50. Uma grande empresa atacadista propôs que a companhia produzisse o mesmo conteúdo, mas com outra marca própria da cadeia, e oferecesse um preço que alcançaria um lucro unitário de R$0,12. A Companhia acredita que um terço das vendas dessa marca especial iria sair provavelmente de seu atual mercado. Caso ela se recusasse a produzir a nova marca, um dos seus competidores poderia aceitar a proposta e, neste caso, a fabricante da “A baiana” teria várias alternativas: não tomar medida alguma, aumentar a verba de propaganda em R$242.000,00 ou diminuir o preço, de forma tal que o lucro fosse de R$0,45 por unidade. Se diminuísse o preço, os competidores poderiam também fazê-lo. Com isso, a Companhia levantou estimativas subjetivas das probabilidades, como demonstradas abaixo. Utilizando os conceitos de árvore de decisão, o que você sugere fabricante da “A baiana”?

Estimativas subjetivas das probabilidades:
a) se a companhia concordar, a chance de perder 10% das vendas é 0,8, 20% é 0,1 e 30% é 0,1;
b) discordando, a chance de que um competidor aceite é 0,5;
c) Se um competidor concordar e "A baiana" não tomar medida alguma, as perdas em vendas poderiam ser de 10%, 20% e 30% com probabilidades de 0,1, 0,1 e 0,8, respectivamente;
d) se um competidor concordar, a companhia despender mais R$242.000,00 em propaganda, as perdas em vendas poderiam ser de 10%, 5% e nulas, com probabilidades de 0,3, 0,4 e 0,3, respectivamente;
e) Se, em vez de maior publicidade, a companhia diminuir o preço, a chance de o competidor também o reduzir é de 0,3. Se ambos reduzirem, as perdas possíveis em vendas serão de 5%, 10% e 15%, com probabilidades 0,5, 0,2, e 0,3, respectivamente. Se somente a companhia reduzir, as perdas poderiam ser 10%, 5% e nulas, com probabilidades de 0,3, 0,5 e 0,2, respectivamente. Resposta: perdas esperadas: concorda = R$18.200,00 não concorda = R$38.162,50. Portanto, a companhia deve concordar em fabricar a marca própria da empresa.

4) Fez-se uma pesquisa de mercado sobre três marcas de suco de uva pronto para o consumo: Jangada, Guarida e Fruto. Todas as vezes que o cliente compra uma nova unidade pode comprar a mesma marca ou mudar para outra. A tabela 3-II indica as probabilidades de continuidade ou de mudanças do consumo (estado). Se hoje 30% usam a marca Jangada, 20% a marca Guarida e 50% a marca Fruto, qual será a distribuição de clientes após a segunda compra vindoura? Aplique os conceitos markovianos e os cálculos de probabilidade. Compare os resultados.

TABELA 3-II

Probabilidades de continuidade ou mudança da preferência do usuário quanto à aquisição do suco

	Jangada	Guarida	Fruto
Jangada	0,7	0,2	0,1
Guarida	0,3	0,5	0,2
Fruto	0,3	0,3	0,4

Resposta

46,8% ⇒ Jangada; 32,0% ⇒ Guarida; 21,2% ⇒ Fruto

5) Em um sistema de crédito, as probabilidades de um cliente não ficar em débito, dever uma prestação, dever duas ou dever três e então entrar na lista negra, em cada mês decorrido, demonstram a manutenção ou mudança de estado (TAB. 3-III). Encontre a probabilidade de um indivíduo, hoje no estado 1, com uma prestação vencida e não paga – estar no estado 0 – não apresentar débito – quando decorridos 90 dias. Se hoje temos 30% de inadimplência, distribuídos em 13% para uma prestação, 10% para duas e 7% para três prestações, como os clientes se distribuirão entre os quatro estados, decorridos 60 dias?

TABELA 3-III

Probabilidades de manutenção ou mudança de situação do cliente no cadastro de devedores

	0	1	2	3
0	0,8	0,2	0,0	0,0
1	0,5	0,3	0,2	0,0
2	0,2	0,5	0,2	0,1
3	0,0	0,0	0,0	1,0

Em que:

(0) – Não apresenta débito;

(1) – apresenta uma prestação mensal vencida e não paga;

(2) – apresenta duas prestações mensais vencidas e não pagas;
(3) – apresenta três prestações mensais vencidas e não pagas. Logo, o nome do cliente entra na lista negra.

Resposta:
(63,97%, 22,07%, 5,50% e 8,46%)

Fez-se uma pesquisa de mercado sobre três marcas de massas para pizzas: Da Terra*, Lazzarini e Mamma Mia*. Todas as vezes que o cliente compra uma nova embalagem ele pode comprar a mesma marca ou mudar para outra. As probabilidades estimadas de manutenção ou transferência de uma marca para outra se encontram na TAB. 3-IV:

TABELA 3-IV
Probabilidades de manutenção ou mudança entre marcas

De \ para	Da Terra	Lazzarini	Mamma Mia
Da Terra	0,6	0,2	0,2
Lazzarini	0,2	0,5	0,3
Mamma Mia	0,4	0,3	0,3

Atualmente 25% das pessoas compram Da Terra, 25% *Lazzarini* e 50% *Mamma Mia*. Considerando que as compras dos consumidores têm frequência mensal e são realizadas na primeira semana de cada mês, qual será a distribuição dos clientes entre as três marcas imediatamente após os próximos 60 dias?

REFERÊNCIAS

ACKOFF, R. L.; SASIENI, M. W. Pesquisa operacional. Rio de Janeiro: LTC, 1979.

ANDRADE, E. L. de. *Introdução à pesquisa operacional.* Rio de Janeiro: LTC, 1990.

BLACKWELL, D. *Estatística básica.* São Paulo: McGraw-Hill, 1974.

BROOKE, A. et al. *Pesquisa operacional.* São Paulo: Atlas, 1988.

BUFFA, E. S. *Administração da produção*. Rio de Janeiro: LTC, 1979.

KAZMIER, L. J. *Estatística aplicada à economia e administração*. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.

MEYER, P. L. *Probabilidade*: aplicações à estatística. São Paulo: LTC, 1982.

SHAMBLIM, J. E.; STEVENS JÚNIOR, G. T. *Pesquisa operacional*: uma abordagem básica. São Paulo: Atlas, 1987.

Capítulo 4

TEORIA DA FILAS

Neste capítulo serão apresentas: (1) preâmbulo ao estudo de filas; (2) método gráfico para a análise de filas; (3) métodos para problemas clássicos de filas; (4) exercícios e referências.

O objetivo é oferecer ao leitor instrumentos para analisar problemas de congestionamento.

1. PREÂMBULO AO ESTUDO DE FILAS

Em 1905, A. K. Erlang, um engenheiro dinamarquês, preocupado em resolver o problema da flutuação da demanda de serviços do equipamento de discagem direta, iniciou o estudo sobre as filas, dando início à teoria das filas (Ellenrieder, 1971).

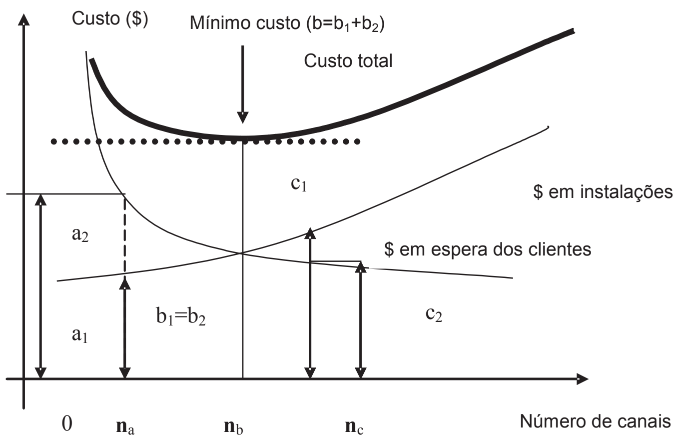
A teoria das filas compõe-se de técnicas determinísticas e probabilísticas. Essas servem para dimensionar um novo sistema de filas ou interpretar um sistema de filas já dimensionado. Como exemplos de sistemas que requerem o dimensionamento, podem ser citados: guichês de supermercados; baias de atracação de um porto; plataformas de manutenção de veículos; médicos em uma clínica; caixas em um banco; pistas de um aeroporto ou o sistema de *check-in* de uma companhia aérea.

Um problema de filas envolve a programação das chegadas de clientes (usuários) ao canal de atendimento (posto de serviço) ou o dimensionamento das instalações ou ambos.

A análise dos problemas de filas proporciona a construção de um sistema de filas de custo mínimo. O propósito é minimizar o custo total em um determinado período de tempo (FIG. 4.1), composto pelos custos das instalações (por exemplo, b_1) e pelos custos de espera dos clientes (por exemplo, b_2).

Os custos das instalações são incrementados conforme aumenta o número de canais de atendimento do sistema de filas e os custos de espera dos clientes são reduzidos com este aumento de canais, uma vez que a espera dos clientes em fila reduz. O resultado da soma destes custos é a formação de uma curva que forma um ponto de mínimo (b).

FIGURA 4.1 – Representação dos custos em um sistema de filas



2. Método gráfico para a análise das filas

É frequente ocorrer sistemas congestionados em determinadas organizações do setor de serviços. O método do gráfico (NEWEL, 1982) é uma técnica determinística importante para a análise de problemas de filas. Por meio do gráfico de fluxo acumulado de clientes por tempo, pode-se praticar um adequado gerenciamento de filas, principalmente se for disponibilizado em um software que capta , instantaneamente, por leitores ópticos, os parâmetros de início e término do atendimento e, além disso, os processa para o monitoramento contínuo do sistema de filas.

As técnicas determinísticas, em geral, baseiam-se em duas políticas: (1) a busca do equilíbrio do fluxo de clientes mediante o dimensionamento do número de atendentes e o período de expansão de atendimento e (2) a busca do equilíbrio da linha de produção, pela da programação da chegada dos clientes e dos tempos de atendimento que cada um exige.

Qualquer das políticas citadas têm o propósito de evitar a ociosidade do sistema de atendimento e serve para um sistema de filas congestionado. A primeira política admite a chegada aleatória dos clientes, e por isso pressupõe a existência de um "depósito" capaz de armazenar estocar ou manter, em uma sala de espera, os clientes que chegam de maneira aleatória a um ritmo mais alto que o do atendimento. Assim, paulatinamente, os clientes vão sendo atendidos até que o período expandido se esgote. A segunda política pressupõe a previsibilidade do instante de chegada do cliente e do tempo de atendimento. Com estas informações, programa-se o fluxo de chegadas e de atendimentos para os sucessivos clientes, ajustando, em um período fixo, a capacidade do sistema de atendimento às necessidades dos clientes.

Descrição de um problema de filas congestionadas

Um exemplo de problema de filas congestionadas é o dimensionamento do número de atendentes do sistema de *check-in* de uma companhia aérea no aeroporto, em que não se admite ociosidade para os canais de atendimento.

Considere que uma aeronave deverá ser carregada com 300 passageiros, e que em um intervalo de 90 minutos todos os passageiros têm que chegar no sistema de *check-in* para as operações de conferência de passagem e despacho de bagagem, como ilustrado na FIG. 4.2. Os passageiros começam a chegar no início do intervalo (curva de chegadas), porém, somente, ao decorrer de 10 minutos é que os atendentes iniciam os atendimentos (começo dos atendimentos).

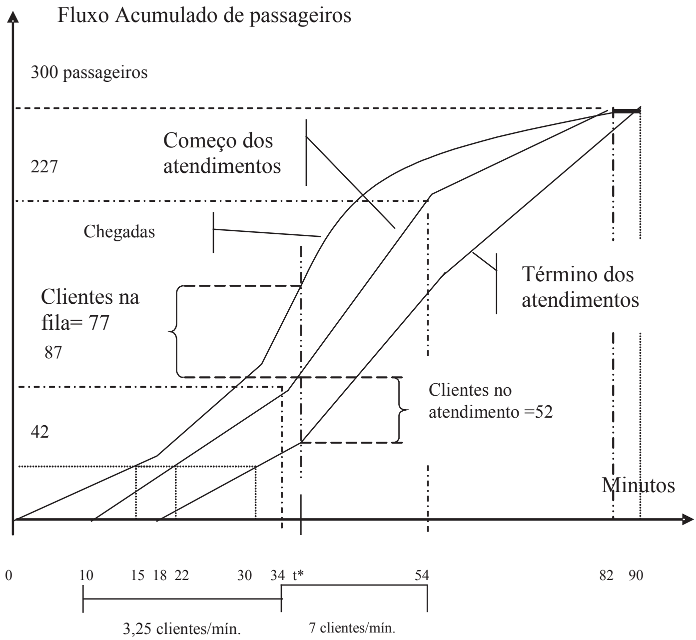
Com sucessivos atendimentos concluídos, decorrido um determinado tempo, acumula-se um certo número de clientes atendidos (curva de término dos atendimentos).

A FIG. 4.2 (a) ilustra o exemplo do quadragésimo segundo (42) passageiro que chega no 15° minuto, espera 7 minutos na fila, tem seu atendimento iniciado no 22° minuto e é liberado no 30° minuto.

Ao longo das operações, o número de funcionários em atendimento varia. Três diferentes inclinações na curva de começo de atendimento demonstram isso: de 10 a 34 minutos, quando foram iniciados os atendimentos à razão de 3.25 clientes/minuto; de 34 a 54 minutos, à razão de 7 clientes/minuto e de 54 a 82 minutos, com a média de 2 clientes/minuto. Nos últimos 8 minutos não chegam novos clientes, porém os últimos ainda estariam em atendimento. Também o tamanho da fila e o número de clientes em atendimento variam (distância vertical entre duas curvas).

Para o instante genérico t* são 77 passageiros na fila e 52 em atendimento. Aos 82 minutos o último cliente tem o seu atendimento iniciado e aos 90 minutos é liberado. Assim, ao término do período (90 minutos) todos os 300 passageiros serão atendidos.

FIGURA 4.2 (a) – Representação de filas no *check-in* em um gráfico de fluxo acumulado

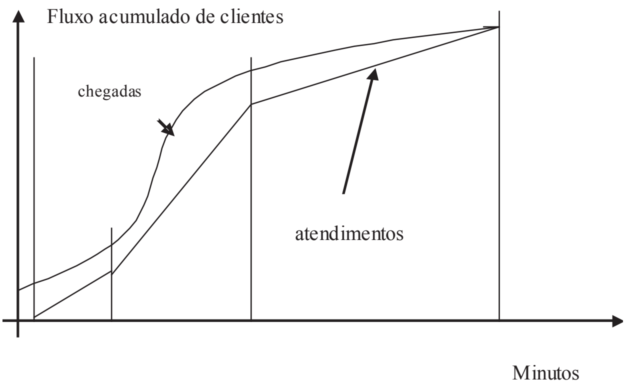


O exemplo citado mostra um retrato dos serviços de *check-in* realizados por uma companhia aérea para um determinado vôo. Nesse exemplo, todos os passageiros foram atendidos a tempo, porém sabe-se que é frequente o atraso nos vôos por consequência dos serviços de *check-in* não terminarem em tempo hábil. Assim, dados históricos que demonstrassem uma série de ocorrências poderiam ser traduzidos em um gráfico de fluxo acumulado e pela análise do gráfico, o redimensionamento das equipes de atendimento poderia ser realizado.

Somente haverá atendimento quando houver clientes, assim, a curva de início de atendimento nunca estará superior à curva de chegadas.

As FIG. 4.2 (b) e 4.2 (c) mostram duas possibilidades de dimensionamento de equipes. A primeira considera três ritmos de atendimento e a segunda conta com apenas um ritmo de atendimento.

FIGURA 4.2 (b) - Representação para três ritmos



Admitindo que um passageiro demore 2,25 minutos para ser atendido no *check-in*, a taxa média de atendimentos será de 0,4444 clientes por minuto (1/2,25).

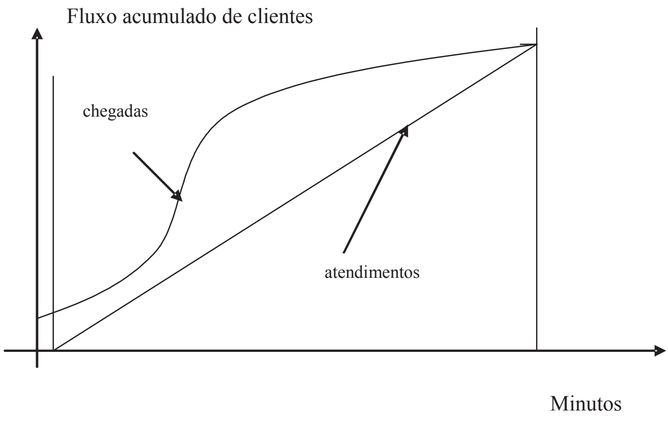
Na FIG. 4.2 (b) os 80 minutos são seccionados em três intervalos, o primeiro de 20 minutos (do instante 10 até o instante 30), o segundo de 24 minutos (do instante 30 ao instante 54) e o terceiro de 36 minutos (do instante 54 ao instante 90).

Para atender, ao longo do primeiro intervalo, os 42 clientes que chegam, a capacidade de atendimento de cada atendente será de aproximadamente 8 clientes no intervalo (0,4444×20=8,88), assim, apenas 5 atendentes serão necessários para atender os 42 clientes.

Para o segundo intervalo, que chegam 185 clientes (227-42=285), a capacidade de cada atendente será de aproximadamente 10 clientes (0,4444×24=10,66), logo serão necessários 18 atendentes.

Finalmente, para o terceiro intervalo, que chegam 73 clientes, cada atendente consegue atender quase 16 clientes (0,4444×36=15,99), por fim, serão necessários 5 atendentes (73/15,99=4,56).

FIGURA 4.2 (c) - Representação para um ritmo



Adotando um só ritmo de atendimento para os 80 minutos, no qual 300 passageiros chegam para o atendimento nos *check-in*, corresponde a uma taxa média de chegadas de 3,75 passageiros por minuto, ou uma média de 35,5 clientes para cada atendente, assim, para os 300 passageiros seriam necessários 9 atendentes (300/35,5=8,45).

Observe que na situação da FIG. 4.2 (b), durante o segundo intervalo, 16 atendentes seriam necessários.

A decisão sobre adotar um só ritmo de atendimento ou três ritmos dependerá da disponibilidade de pessoal. O leitor pode perceber que se esse vôo for o único a demandar os atendentes, a estratégia do ritmo único de atendimento exige um número menor de atendentes, entretanto a espera média de um passageiro será maior do que quando adotar a estratégia de três ritmos de atendimento.

Quando as companhias aéreas têm vários vôos em cada turno, manhã, tarde ou noite, o gerente de pessoal pode deslocar atendentes de um vôo para outro vôo, no mesmo turno, aproveitando as vantagens da variação dos ritmos de atendimento no sistema de filas em um e em outro vôo, que é o baixo tempo de espera dos passageiros na fila para chegar ao *check-in* e, além disso, trabalhando com o menor número possível de atendentes por turno.

3. Métodos para problemas clássicos de filas

Os métodos probabilísticos servem para dimensionar o número de canais de atendimento de um sistema de filas não congestionado e para a análise do seu desempenho.

Baseando-se na da observação dos tempos de chegada dos clientes que demandam um determinado tipo de serviço e dos tempos de atendimento necessários para concluir o serviço, traçam-se as curvas de distribuição de probabilidade, buscam-se curvas teóricas que se ajustam às mesmas e, com bases nas teorias probabilísticas, analisam-se as condições do sistema de filas ou dimensiona-se um novo sistema.

A compreensão do tipo de distribuição das chegadas ou atendimentos em um problema de filas é fundamental. Mediante a observação e coleta dos dados, deve-se fazer o teste estatístico de ajustamento da distribuição de frequência real a uma curva de distribuição teórica.

Apenas as filas probabilísticas que têm as chegadas de clientes por unidade de tempo ajustadas à curva teórica de Poisson, em um sistema de filas não congestionado, serão aqui apresentadas. Em muitos casos, os dados se ajustam a esta curva teórica, por exemplo: fluxo de tráfego de veículos, demanda por serviços bancários e serviços públicos de telefonia.

Quando o número de observações é grande e a probabilidade de um determinado número de ocorrências é pequena, a distribuição de frequência de um conjunto de dados pode, em muitos casos, ajustar-se satisfatoriamente a uma curva teórica de Poisson.

Se as observações de número de clientes por intervalo de tempo têm frequências que se ajustam à curva de Poisson, os intervalos de tempo entre as ocorrências, que é *continuum*, seguem uma curva exponencial negativa (Andrade, 1990).

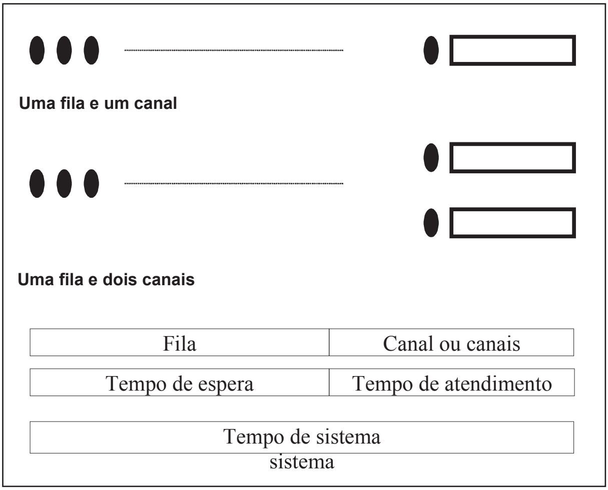
A teoria das filas tratada a seguir pressupõe que a disciplina de atendimento é FIFO – primeiro a chegar é o primeiro a ser atendido.

Definição dos termos em filas probabilísticas

Um sistema de filas consiste em um conjunto de usuário, um conjunto de atendentes (canais) e uma ordem pela qual os usuários (clientes) chegam e são processados.

• Sistema de filas: consiste-se em uma fila composta por clientes que obedecem a uma ordem de chegadas, e atendentes ou canais de atendimento que podem atender aos clientes em um tempo constante ou variado (FIG. 4.3).

FIGURA 4.3 – Representação de um Sistema de Filas



- Fila: número de clientes esperando atendimento.
- Canal de atendimento: local de atendimento do cliente.
- Taxa média de chegada (λ): clientes por período de tempo que demandam o atendimento.
- Taxa média de atendimento (μ): clientes por período de tempo que são atendidos efetivamente.
- Tempo médio de atendimento: o inverso da taxa média de atendimento.
- Prioridade da fila: a forma de atendimento, primeiro a chegar – primeiro a ser atendido, ou último a chegar – primeiro a ser atendido (FIFO, LIFO).
- Distribuição estatística das chegadas: o comportamento estatístico dos dados (Poisson, aleatória).
- Cliente: unidade de chegada que requer serviços de um canal de atendimento.

• Tamanho da unidade de chegadas (individual, dezenas ou centenas).

Modelo de um canal

Para este modelo os pressupostos são: sistema estacionário, fila única, disciplina FIFO – primeiro a chegar será o primeiro a ser atendido, taxas de chegadas e de atendimento segundo a curva de distribuição de frequência Poisson e população infinita.

a) Probabilidade de haver "n" clientes no sistema de único canal de atendimento

$$P_n = [1 - (\lambda/\mu)] \cdot (\lambda/\mu)^n \tag{4.1}$$

b) Fator (ou taxa) de utilização do sistema

$$\rho = \lambda / \mu \tag{4.2}$$

Caso essa seja maior que 1, o sistema estará congestionado, o que indica que a fila crescerá indefinidamente.

c) Número médio de clientes no sistema

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \tag{4.3}$$

$$L = 0 \times P_o + 1 \times P_1 + 2 \times P_2 + ... + n \times P_n \tag{4.4}$$

d) Número médio de clientes em espera na fila

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} \tag{4.5}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu \times (\mu - \lambda)} \tag{4.6}$$

e) Tempo médio de espera no sistema (W) e na fila (W_q)

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \tag{4.7}$$

Para qualquer situação, independente do número de canais do sistema de filas, o tempo médio de espera no sistema compreende a soma do tempo médio de espera do cliente na fila mais o tempo médio de atendimento:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{4.8}$$

Também há uma correlação direta entre o tempo médio do cliente e o número médio de clientes no Sistema, para qualquer número de canais:

$$W = \frac{L}{\lambda} \tag{4.9}$$

Analogamente, há uma correlação entre o tempo médio e o número médio de clientes na fila:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \tag{4.10}$$

f) Probabilidade de o sistema estar vazio

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \tag{4.11}$$

MODELO COM VÁRIAS ESTAÇÕES DE SERVIÇO

Para este modelo os pressupostos são: sistema estacionário, fila única, disciplina FIFO – primeiro a chegar será o primeiro a atender – distribuição de frequência para as taxas de chegada e de atendimento segundo a curva de Poisson e população infinita.

a) Probabilidade de o sistema estar vazio

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{m=0}^{k-1}\left(\frac{1}{m!}\right)\times\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\right]+\frac{1}{k!}\times\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\times\left[\frac{k\times\mu}{(k\times\mu)-\lambda}\right]} \qquad (4.12)$$

Em que **k** é o número de canais e **m** é o contador para o somatório.

b) Cálculo dos tempos médios do cliente na fila e no sistema e dos número médios de clientes no sistema e na fila

• O tempo médio do cliente na fila:

$$W_q = \frac{P_0\cdot(\lambda/\mu)^k\cdot\lambda\cdot\mu}{\lambda\cdot(k-1)!\cdot(k\cdot\mu-\lambda)^2} \qquad (4.13)$$

• O tempo médio de espera do cliente no sistema pode ser encontrado combinando as equações 4.13 e 4.8.

• O número médio de clientes no sistema é determinado pelo uso combinado das equações 4.13, 4.8 e 4.9.

• O tamanho médio da fila pode ser calculado combinando as equações 4.13 e 4.10.

c) Probabilidade de possuir "n" clientes no sistema

c.1) Sendo "n" (número de clientes no sistema) menor que o número de postos de atendimento

$$0 \leq n \leq k \rightarrow P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n \cdot P_0}{n!} \tag{4.14}$$

c.2) Sendo “n” maior ou igual ao número de postos de atendimentos

$$n \geq k \rightarrow P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n \cdot P_0}{k!\cdot k^{(n-k)}} \tag{4.15}$$

d) Taxa de utilização:

$$\rho = \frac{\lambda}{k \cdot \mu} \tag{4.16}$$

MODELO COM O TEMPO DE SERVIÇO ARBITRÁRIO PARA UM SÓ CANAL

Para este modelo os pressupostos são: sistema estacionário, fila única, disciplina FIFO – primeiro a chegar será o primeiro a atender – distribuição de frequência para a taxa de chegada segundo a curva de Poisson, distribuição de frequência para o tempo de atendimento arbitrário e população infinita.

Número médio de clientes no sistema:

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2\left[\left(\frac{1}{\mu}\right)^2 + \sigma^2\right]}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} \tag{4.17}$$

Em que:

σ^2= variância

$\frac{\lambda}{\mu}$ é a taxa de utilização (equação 4.2) e $\frac{1}{\mu}$ é o tempo médio de atendimento. Trata-se de um sistema de um único posto de atendimento.

O comprimento médio da fila e o tempo médio de espera na fila podem ser encontrados de acordo com as equações (4.10) e (4.8), respectivamente.

MODELO COM O TEMPO DE SERVIÇO CONSTANTE PARA UM SÓ CANAL

Para este modelo os pressupostos são: sistema estacionário, fila única, disciplina FIFO – primeiro a chegar será o primeiro a atender – distribuição de frequência para a taxa de chegada segundo a curva de Poisson, tempo de atendimento constante e população infinita.

Se o tempo de atendimento, $\left(\frac{1}{\mu}\right)$, for constante, o desvio padrão será nulo e, por conseguinte, a variância do tempo de atendimento também será nula, $\sigma^2 = 0$, então:

$$L = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2\left[\left(\frac{1}{\mu}\right)^2\right]}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} \tag{4.18}$$

ou

$$L = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \tag{4.19}$$

Tendo como dado o parâmetro L (número médio de clientes na fila) da equação 4.19, resume-se a uma equação do segundo grau, com ϱ sendo a incógnita.

Exemplo 4.1 - Caminhões são descarregados por meio de guindastes aéreos. O tempo médio entre as chegadas é de 30 minutos e trata-se de uma distribuição exponencial. A taxa média de descarga é de três caminhões por hora. O custo de um operador de guindaste e de um carro guindaste é de R$70 por hora. Quantos carros guindastes devem ser usados se o custo de um operador de caminhão mais caminhão parado é de R$100/hora? Para um só guindaste, quantos caminhões em média estarão em fila?

Resolução

• Para um só guindaste

a) Cálculo do tempo médio de um caminhão no sistema, pela equação (4.7):

$$W = \frac{1}{3-2} = 1 \text{ hora (na fila mais no atendimento)}$$

Considerando o dia com 8 horas de funcionamento, têm-se 16 caminhões por dia como demanda, então o custo com caminhões parados por dia fica:

$$C_{diário \quad ca\min.} = 1\frac{hora}{ca\min hão} \cdot 16\frac{ca\min hões}{dia} \cdot R\$100,00/hora = R\$1.600,00/dia$$

b) Custo com o guindaste por dia:

$$C_{diário \quad guind} = 8\frac{horas}{dia} \cdot \frac{R\$70,00}{hora} = R\$560,00/dia$$

c) Custo total por dia = R$2.160,00

d) Número médio de caminhões no sistema e em média na fila, calculado pelas equações (4.3) e (4.5):

$$L = 2 \rightarrow L_q = 2 - \frac{2}{3} = 1{,}333 \rightarrow \text{ caminhões}$$

• Cálculo para dois guindastes

Calcula-se o custo com o guindaste por dia e o custo dos veículos empatados no sistema.

Para o cálculo do custo dos veículos empatados no sistema, inicia-se com o cálculo do tempo médio do cliente (caminhões) na fila, equação (4.13) e acrescenta-se o tempo médio de atendimento, equação (4.8). O custo total por dia seria de aproximadamente R$1.720,00.

• Cálculo para três guindastes:

De maneira análoga, o custo total por dia para três guindastes resulta em aproximadamente R$2.230,00. Conclusão: uma comparação entre os resultados indica que dois guindastes devem ser adotados.

Exemplo 4.2 - Uma refinaria distribui seus produtos por intermédio de caminhões carreados, no posto de atendimento. São carregados os caminhões próprios e os caminhões de terceiros. As firmas proprietárias desses caminhões querem que a refinaria instale um novo posto de atendimento ou, então, que ela faça o pagamento das perdas referentes aos tempos de espera na fila. Dos caminhões totais, 30% são de terceiros. Supondo que os dados estatísticos das taxas de chegada e de atendimento sigam Poisson, e que as taxas médias de chegada e de atendimento sejam, respectivamente, de 2 e 3 caminhões por hora, calcule:

a) a probabilidade de um caminhão qualquer no sistema;
b) a probabilidade de que exatamente um caminhão esteja na fila;
c) o tempo médio de um caminhão qualquer no sistema;
d) o tempo médio de um caminhão esperando na fila e de todos os caminhões de terceiros;
e) supondo que o custo anual equivalente (HESS et al., 1982) à implantação de um novo posto de atendimento é de R$150.000,00, que o custo de uma hora do caminhão próprio mais o operador é de R$80,00 e o custo total cobrado pelos terceiros de uma hora de caminhão parado com o motorista é de R$88,00 reais, quantos postos novos de atendimento deveriam ser instalados?
Resolução
a) probabilidade de um caminhão qualquer esperar no sistema é a taxa de utilização.
Equação (4.2)

$$\delta = \frac{2}{3} = 0{,}66$$

b) probabilidade de que exatamente um caminhão esteja na fila é a de que existam dois no sistema, pois havendo dois, um estará no posto de atendimento, e o outro estará na fila.
Equação (4.1):

$$P_2 = 0{,}148148 \rightarrow (pois: \lambda = 2, \rightarrow e \rightarrow \mu = 3)$$

c) o tempo médio de um caminhão qualquer no sistema.
Equação (4.7):

$$W = \frac{1}{3-2} = 1 \rightarrow hora$$

d) O tempo médio de um caminhão qualquer na fila (não importa se é ou não de terceiros)
Utilizando-se das equações 4.3, 4.5 e 4.10, tem-se:

$$L = \frac{2}{3-2} = 2 \rightarrow \text{caminhões}$$
$$L_q = 2-(2/3) = 1{,}3333 \rightarrow \text{caminhões}$$
$$W_q = 1{,}3333/2 = 0{,}666 \rightarrow \text{horas}$$
$$\text{Espera} \quad 2 \times 8 \times 0{,}30 \times 0{,}666 = 3{,}2 \rightarrow \text{horas/dia}$$

e) Cálculo do custo de espera em fila por dia para os caminhões dos terceiros:
custo total para os terceiros = 3,2 horas x R$88,00=R$281,60 por dia ou supondo que o funcionamento seja de segunda à sexta, 8 horas/dia e no sábado, 4 horas por dia, tem-se:
365 x (5,5/7) dias x 281,60 = R$80.758,00
• Cálculo da espera em caminhões próprios no atual sistema (k=1)
Da equação (3.5): L_q= 1,33 ⇒ Da equação (3.10): W_q=0,66 horas
Espera diária em fila dos caminhões próprios = 2 caminhões/hora x 8 horas/dia x 0,7 x 0,66 horas/caminhão = 7,45 horas em veículos ⇒ a R$80,00/hora ⇒ R$592,00/dia ⇒ 5,5 dias/semana de funcionamento ⇒ 365 x (5,5,/7) x 592,00 = R$169.777,14/ano. Somado aos R$80.758,00 em caminhões de terceiros, o custo total seria R$250.535,14 anuais (as atuais instalações são consideradas totalmente depreciadas).

• Para k=2 (caso instale um novo posto em conjunto com o existente):
Da equação (3.12) ⇒ P_o=0,5
Da equação (3.13) ⇒ W_q=0,041 horas ⇒ espera total diária

em caminhões próprios = 0,459 horas e em caminhões de terceiros são 0,196 horas. Os respectivos custos seriam de: 0,459 x 80,00 x 365 x (5,5/7) = R$10.530,77/ano para os caminhões próprios, 0,196 x 88,00 x 365 x (5,5,/7) = R$4.944,18/ano para os caminhões de terceiros e R$150.000,00 no investimento em uma nova plataforma, o que totalizaria R$165.474,95, menor que os R$250.535,14 anuais para o sistema já instalado, assim, deve-se instalar um novo posto de desempenho equivalente para operar com o existente.

4. EXERCÍCIOS

1) O gerente de um supermercado deseja ter uma fila ou mais de uma, de maneira tal que em média não ultrapasse dez clientes esperando em fila para começar a ser atendido pelo caixa. Ele sabe, em média, que um caixa demora quatro minutos para liberar um cliente, e que a cada cinco minutos um novo cliente procura um caixa para registrar as suas compras. Quantos caixas você sugere que o gerente instale? Considere que as taxas de atendimento e de chegada obedecem a lei de Poisson.
Resposta: basta um caixa.

2) Numa grande empresa têxtil as máquinas de fiação sofrem avarias em média 4 por hora, segundo uma distribuição de Poisson. Cada máquina tem de ser reparada por um único mecânico que demora em média dez minutos. A empresa estima em R$3,00/hora o custo de mão-de-obra de um mecânico e em R$15,00/hora o custo de cada máquina parada. Determine como e quantos mecânicos a empresa precisa alocar para a manutenção de maneira a ter a otimização dos custos.

3) Suponha que um levantamento estatístico de fluxo de veículos na BR 050, no local onde se pretende instalar um pedágio, no sentido de Uberaba para Uberlândia, revele que a distribuição de probabilidade do número de veículos, por hora, possa ser representada por uma curva teórica de Poisson com uma média de 118 veículos por hora, e que o tempo de um caixa de pedágio varia segundo o perfil de uma curva teórica exponencial negativa, em torno de 30 segundos. Sabendo-se que o administrador do Departamento de Estradas regional pretende instalar um número de caixas, de forma que atualmente o número médio de veículo esperando em fila seja de apenas um ou menos, determine quantos caixas deverão ser instalados no pedágio. Admitindo que ocorra um aumento anual do fluxo de veículos em 8%, e que o administrador deseje instalar mais caixas quando o número médio de veículos em fila superar 10 veículos, em que ano deverá ser feita a ampliação?
Resposta: deve-se iniciar com dois canais e no ano nove o sistema deve estar ampliado.

4) Uma empresa deseja comprar um equipamento para efetuar manutenção em suas máquinas que estragam a um ritmo de 12 falhas/semana, segundo a distribuição de Poisson. Tem-se duas opções: equipamentos A e B. O equipamento A é capaz de realizar 15 consertos por semana e a ele atribui-se um custo fixo semanal de R$740,00. O equipamento B é capaz de realizar 50 consertos por semana e a esse atribui um custo fixo semanal de R$2.960,00. Uma máquina da produção, quando está parada, tem custo fixo semanal de R$5.000,00. Os custos operacionais dos equipamentos são desprezíveis. Qual equipamento de manutenção deve ser adquirido?
Resposta: adquirir o equipamento B.

5)Em um levantamento estatístico, foram encontrados os seguintes dados:

• tempo ocioso do atendente: 62%;

• tempo médio gasto no sistema por cliente: 0,25 hora.

Determine a probabilidade de que haja mais clientes na fila do que o número médio de clientes na fila. (canal único, fila única, FIFO, população infinita).

6) Uma empresa têxtil tem um custo de R$6,00/homem por hora para a manutenção e calcula o custo do tempo de espera do conjunto de máquinas de fiação em R$150,00 por hora. Se as interrupções devido às avarias ocorrem numa média de 4,8 por hora e um operário da manutenção pode repará-las entorno de 6 avarias por hora, qual deve ser o tamanho da equipe de manutenção? As chegadas e atendimentos ajustam-se às curvas de distribuição de Poisson.

7) Uma rede de locadoras de veículos de uma grande cidade decidiu instalar uma oficina de alinhamento e balanceamento para a sua própria frota. Um levantamento estatístico mostrou que em média as necessidades de serviços ocorrem à razão de 18 por dia. Cada hora parada de um veículo causa uma perda de R$50,00 por dia. A rede de locadoras precisa decidir sobre qual equipamento ela deve instalar. Para isso, dois tipos estão disponíveis no mercado:

• Alfa: permite atendimentos com o tempo médio de 40 minutos por veículo e tem um custo diário de R$520,00, incluídos os fixos e variáveis;

• Beta: permite atendimentos com o tempo médio de 160 minutos por veículo e tem um custo diário de R$130,00, incluídos os fixos e variáveis.

Qual deve ser a decisão da locadora?

Sabe-se que não há restrições de espaço físico para a instalação de postos de serviços.

Mostre:

a) O custo em veículos parados para cada alternativa estudada.

b) O número médio de veículos esperando para ser atendido na situação ótima.

c) Qual deverá ser a utilização do sistema ótimo?

Considere que as necessidades de serviços seguem uma distribuição de Poisson e que os tempos de atendimento seguem uma curva de distribuição exponencial negativa. Um dia da oficina deverá ter 14 horas de funcionamento.

8) Conselho de pós-graduação propôs transferir a única secretária que faz o registro dos diplomas de pós para o setor de registro de diplomas de graduação. Esse tem seis secretárias responsáveis pela rotina de serviços de registros e vem operando com 85% da sua capacidade, sendo que cada secretária demora, em média, 20,83 minutos para atender um diploma. Os tempos entre as chegadas dos requerimentos de registro na pós-graduação são, em média, de 20,76 minutos, equivalente ao tempo médio de atendimento. As distribuições estatísticas desses tempos seguem curvas de perfil exponencial negativo. Analise ambos os sistemas de filas e verifique as vantagens ou desvantagens em agregar a secretária da pós-graduação ao setor de registro de diplomas de graduação e submeter ambos os tipos de diplomas à esta secretaria que passaria a ter sete atendentes. Nessa hipótese considere que o desempenho de cada secretária seja equivalente ao do antigo setor de registro de diplomas de graduação.

Resposta: vale a pena juntar as secretarias.

9) Uma fábrica tem um depósito de ferramentas com um balcão e um único atendente, onde os operários vão receber as ferramentas de acordo com as necessidades de cada tarefa. Verificou-se que: (1) a média dos tempos entre as chegadas dos operários é de 54 segundos e esses têm uma distribuição de frequência segundo uma curva teórica exponencial negativa; (2) a taxa média dos atendimentos é de 1,1 operários por minuto e esses têm uma distribuição segundo uma curva teórica de Poisson. A fábrica paga R$0,90 por hora ao atendente e R$1,80 por hora ao operário. Pede-se:
a) O custo diário do atual sistema.
b) Havendo a possibilidade de contratar mais atendentes para o balcão ao mesmo preço, quantos deveriam ser contratados?
c) Na situação ótima, qual seria a probabilidade de algum operário esperar para ser atendido?
Respostas: (a) infinito; (c) 0,1711.
10) O gerente da divisão logística de uma rede de supermercados em uma área metropolitana tem percebido, nas plataformas de carregamento do depósito central, problemas de filas em determinados momentos e de ociosidade em outros. Preocupado em agilizar o atendimento às várias lojas, ele quer contratar um administrador de operações para ajudá-lo na solução do problema. Para isso, o teste de seleção contempla a seguinte questão:

As chegadas de caminhões para o carregamento são à razão de três caminhões por hora e o tempo médio de carregamento é de 35 minutos. A empresa dispõe de 2 plataformas de carregamento e tem um custo semanal atual com a folha do pessoal de carregamento de R$680,00, incluído os encargos trabalhistas. Os caminhões, que são fretados de terceiros, cus-

tam R$12,00 por hora de veículo parado na fila, sem contar o valor do custo no roteiro de entrega.
Atualmente, as distribuições estatísticas das taxas de chegada e de atendimento ajustam-se, satisfatoriamente, à curva teórica de Poisson. Os despachos ocorrem durante 8 horas por dia, com duas equipes de carregadores atendendo à uma única fila.

O gerente considera duas hipóteses de mudanças:
a) aproveitar uma velha plataforma desativada e contratar mais uma equipe de carregadores;
b) considerar dois subsistemas de uma fila e um canal, e realizar um treinamento das equipes de carregamento que encareça em 15% o custo semanal com a folha do pessoal. Assim, os tempos de carregamento, com distribuição estatística aleatória, chegariam a uma média de 28 minutos e o desvio padrão seria de 14 minutos.
Qual deveria ser a decisão?

Referências

ANDRADE, E. L. de. *Introdução à pesquisa operacional.* Rio de Janeiro: LTC, 1990.

ASHFOR, N. et al. Passenger behavior and the design of airport terminals. *Transportation Research Board Record*, Washington, n. 588, 1976.

BUFFA, E. S. *Administração da produção*. Rio de Janeiro: LTC, 1979.

CHASE, R. B.; AQUILANO, N. J. *Production & operations management*. New York: R. D. Irwin, 1992.

ELLENRIEDER, A. von. *Pesquisa operacional*. Rio de Janeiro: A. Neves, 1971.

HESS, G. et al. *Engenharia econômica*. São Paulo: Difel, 1982.

NEWEL, G. F. *Applications of queuing theory*. New York: Chapman and Hall, 1982.

SHAMBLIM, J. E.; STEVENS JÚNIOR, G. T. *Pesquisa operacional*: uma abordagem básica. São Paulo: Atlas, 1987.

SLACK, N. et al. *Administração da produção*. São Paulo: Atlas, 1997.

WIDMER, J. A. *Contribuição à análise de problemas de filas e estoques nos transportes*. 1989. Tese (Livre-docência) – Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1989.

Sobre o livro

Formato	21 cm x 14,5 cm
Tipologia	Garamond
	Swiss721 BT
	Swiss721 Cn BT
Papel	Sulfite 75

gráficaufu
Divisão Gráfica • Universidade Federal de Uberlândia

Mesmo considerando que a Pesquisa Operacional seja um tema consolidado como ferramenta de análise para a administração, esta obra tem um grande mérito que é o de trazer para o campo didático um assunto tão relevante. Nesse sentido, este livro resulta de uma experiência acumulada em sala de aula, o que permitiu ao autor depurar não só o conteúdo como também refinar os exemplos que dão notoriedade a questões de tomada de decisões, proporcionando a aplicabilidade de métodos e técnicas sofisticadas relacionadas aos sistemas produtivos. Interessa diretamente às áreas de exatas, contabilidade, administração de empresas, ciências econômicas, da computação e da terra.

Editora filiada à

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA
DAS EDITORAS UNIVERSITÁRIAS

ISBN 85-7078-174-1

9 788570 781741